Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa

Red Cimates

Memoria

XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa

CINVESTAV-IPN

Universidad Autónoma de Guerrero

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores Monterrey

Universidad Autónoma de Guerrero

Universidad Nacional Autónoma de Chiapas

Instituto Politécnico Nacional

Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa

Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. CMM-040505-IC7

www.red-cimates.org.mx

ISBN: 978-970-9971-14-9

Editoras: Gabriela Buendía Abalos

Gisela Montiel Espinosa

Evaluadores

Alberto Camacho Ríos	José Iván López Flores
Alma Rosa Pérez Trujillo	Javier Lezama Andalón
Ana María Ojeda Salazar	Juan Alberto Acosta Hernández
Anabelle Castro Castro	Juan Gabriel Molina Zavaleta
Agustín Grijalva Monteverde	Liliana Suárez Téllez
Apolo Castañeda Alonso	Luz María Mingüer Allec
Armando Albert Huerta	Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez
Avenilde Romo Vázquez	Marcela Ferrari Escolá

EVALUADORES

Blanca Ruíz Hernández

Carlos Oropeza Legorreta

Carolina Carrillo García

Catalina Navarro Sandoval

Cecilia Crespo Crespo

Claudia Muro Urista

Crisólogo Dolores Flores

Eduardo Carrasco Henríquez

Elika Sugey Maldonado

Evelia Reséndiz Balderas

Flor M. Rodriguez Vásquez

Francisco Cordero Osorio

Gabriela Buendía Abalos

Gisela Montiel Espinosa

Gustavo Martínez Sierra

Hipólito Hernández Pérez

Hugo A. Carrillo Serrano

Maribel Vicario Mejía

Mónica García Zatti

Olda Nadinne Covián Chávez

Patricia Colín Uribe

Patricia Lestón

Patricia Salinas Martínez

Pilar Rosado Ocaña

Raciel Vásquez Aguilar

Rocío Uicab Ballote

Ruth Rodriguez Gallegos

Santiago Ramiro Velázquez Bustamante

Saúl E. Ramos Cancino

Silvia E. Ibarra Olmos

Silvia Guadalupe Maffey García

Socorro Valero Cázarez

Tomás Sánchez Cabrieles

Victor Larios Osorio

MEMORIA DE LA

XI

ESCUELA DE INVIERNO EN

MATEMÁTICA EDUCATIVA

Red Cimates

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN UN AMBIENTE GEOMETRICO DINAMICO BAJO EL ENFOQUE COVARIACIONAL

Alejandro Del Castillo Escobedo, Gisela Montiel Espinosa

C. B. T. I. S. NO. 164, TECNOLÓGICO DE MADERO; CICATA-IPN, LEGARIA

alejandro.delcastilloecobedo@gmail.com, gmontiel@ipn.com

Resumen. *El concepto escolar de función predominante en la actualidad es aquel que alude a una regla de correspondencia y en la investigación en matemática educativa ha sido ampliamente cuestionado por su carácter estático y algorítmico. Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio cuya finalidad es estudiar las nociones que construye el alumno de la función en un ambiente geométrico dinámico visto desde el enfoque de razonamiento covariacional. El ambiente geométrico dinámico permite proporcionar la representación básica de la variación y de la dependencia funcional, y un acercamiento al concepto desde su naturaleza covariacional permite pensar en las funciones de diferente tipo (polinómicas, exponenciales y logarítmicas) como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas, y dicha covariación puede jugar un papel fundamental en el desarrollo y consolidación de estas funciones.*

Palabras Clave: función, ambiente geométrico dinámico, covariación, razonamiento covariacional.

Introducción

El concepto de función es parte fundamental en matemáticas. Basta comentar que es el principal vehículo para la modelación de fenómenos reales. Estándares internacionales como los del National Council of Teachers of Mathematics reportan que uno de los temas centrales en matemáticas es el estudio de patrones y funciones (NCTM, 1989).

La evolución del concepto de función, en los últimos tres siglos, gracias a su íntima relación con el Cálculo y el Análisis, ha madurado llegando a su estado actual. Este se remonta a 4000 años atrás; 3700 de los cuales consisten en pocas evoluciones hacia él y en los últimos 300 tiene conexiones cercanas con el cálculo y el análisis. Aquí consideramos que éste puede ser visto a partir del debate entre dos posturas:

Una tercera postura aparece con la definición "lógica" de función como una correspondencia. La concepción geométrica ha sido abandonada con el tiempo y un nuevo debate se presenta en nuestros días (Kleiner, 1989):

El concepto de función es en extremo complejo, posee múltiples formas de representación (gráficas, formulas, tablas, relaciones verbales, icónica), que obligan al individuo a transformar una representación en otra, según la situación y el contexto donde cobra vida. Existen diversos *sub-conceptos* asociados al concepto de función, a saber, dominio, rango, cantidad, variable, razón, inversa, composición, entro otros.

Según el nivel educativo, el área académica o el problema en sí, hay diversas definiciones aceptadas asociadas al concepto de función, y aunque son definiciones son equivalentes, difieren conceptualmente (Vinner y Dreyfus, 1989).

El concepto de función ha sufrido drásticas transformaciones en un periodo de más de 300 años, desde que Leibniz introduce el término, pasando por los antecedentes de Oresme y Galileo, los aportes de Descartes, Newton, Leibniz y Euler hasta la definición conjuntista de Bourbaki. Su apertura fue acuñando un término que describe una idea puramente geométrica, la cual ha evolucionado en un concepto de importancia mayúscula en las matemáticas.

Diversas investigaciones hacen alusión a la complejidad del concepto:

> "…aunque esta definición esta construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático" (Freudenthal,1983)[46]

> "El enfoque Bourbaki es excesivamente abstracto, especialmente como una primera introducción para estudiantes pre-universitarios." (Sfard, 1992)

> "…hay mucha evidencia empírica para demostrar que, aunque esta definición es un excelente fundamento matemático, puede no ser una buena raíz cognoscitiva" (Tall, 1992)

> "La concepción más fundamental de una función es que es una relación entre magnitudes variables. Si esto no es desarrollado, representaciones tales como ecuaciones y gráficas pierden su significado y se hacen aisladas una de la otra. Introducir funciones a jóvenes estudiantes mediante su elaborada definición moderna es un error didáctico - una inversión antididáctica." (Sierpinska, 1992)

[46] citado por Falcalde, Laborde y Mariotti, (2007)

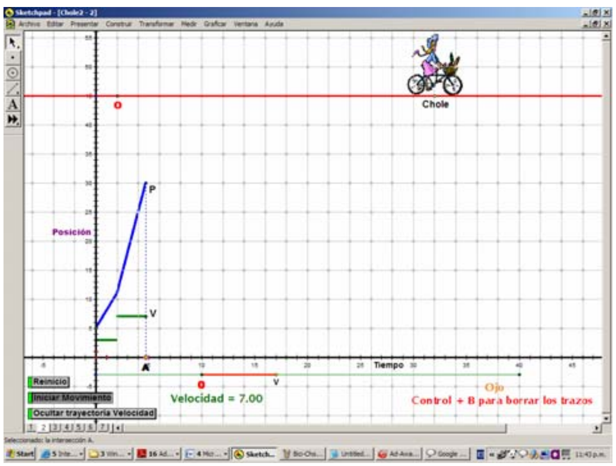
Desde el punto de vista del sistema de enseñanza, tradicionalmente el curso de precálculo es un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes esencialmente del álgebra y de la geometría analítica, tocando con mayor o menor énfasis el estudio de función, habitualmente sobre la definición de Dirichlet-Bourbaki. Su enseñanza tiende a sobrevalorar los procedimientos analíticos y la algoritmización, dejando de lado a los argumentos visuales, entre otras causas por no considerarlos como matemáticos, o bien por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea sin considerar, por ejemplo, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. A ello se aúna el contrato didáctico establecido, que como parte de la negociación impide que el status del profesor sea demeritado; si éste no resuelve satisfactoriamente los problemas planteados en el curso, el recurso algorítmico permitirá subsanar decorosamente lo establecido en el contrato aligerando y eliminando dificultades intrínsecas al contenido matemático.

En la perspectiva de la construcción social del conocimiento se establece que:

> "… el desarrollo del concepto de función se ha hecho casi a la par del humano, es decir, encontramos vestigios del uso de correspondencias en la antigüedad, y actualmente se debate sobre la vigencia, en el ámbito de las matemáticas, del paradigma de la función como un objeto analítico. Empero, el concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría. La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores [...]". Cantoral y Farfán (1998).

"Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva; la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta." Farfán y García (2005).

Podemos concluir, con base en los resultados anteriores, que el concepto escolar de función predominante en la actualidad es aquel que alude a una regla de correspondencia y en la investigación en matemática educativa ha sido ampliamente cuestionado por su carácter estático, algebraico y algorítmico (fórmula->tabla->puntos en el plano->gráfica).



Curva como representación espacial de una función

En este trabajo consideramos, al igual que Falcalde, et al., (2007), que el ambiente geométrico dinámico puede proporcionar la representación básica de la variación y de la dependencia funcional, y a partir de esto introducir en el estudiante la noción de función.

Considerando a la curva como la representación espacial de una función en el plano coordenado, como la trayectoria de un punto **P**(x,f(x)) en movimiento, donde el punto **A** representa la variable independiente y se mueve sobre el eje de las abscisas, la orden o instrucción Trace (Traza, Rastro) nos permite *pasear* por o *explorar* dicha trayectoria o curva. mientras que la orden Drag (Arrastre) permite experimentar la combinación de dos movimientos interrelacionados, así como la dependencia de movimiento entre los puntos básicos y los puntos construidos que le permiten experimentar con una simulación de movimiento real.

La estrategia principal en este ambiente es usar simulaciones interactivas y herramientas de visualización (Kaput, 2002). En términos educativos la simulación es una estrategia que permite imitar problemas complejos del mundo real para analizar el comportamiento de los sistemas así como de su progreso. La modelación por computadora proporciona un contexto educativo que ha atraído la atención en años recientes. Los avances en tecnología y en el desarrollo de interfaces que se manipulan directamente la han hecho accesible a estudiantes de un amplio rango de edades. Hace no mucho tiempo para poder modelar con computadora era necesario aprender lenguajes de programación lo que restringía el rango de alumnos que podían usarla (Suarez, 2000).

En consecuencia, es factible pensar que a través de situaciones concretas y organizadas el alumno puede desarrollar pensamiento covariacional relacionado a la noción de función.

Diferentes investigaciones (Ferrari, 2004; Chimal, 2005; Nieves, 2005; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Confrey y Smith, 1995) han considerado que un acercamiento al concepto desde su naturaleza covariacional permite pensar en las funciones de diferente tipo (polinómicas, exponenciales y logarítmicas) como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas, y dicha covariación puede jugar un papel fundamental en el desarrollo y consolidación de estas funciones. Así como ser una importante habilidad para interpretar, describir y representar una función de un evento dinámico. También permite un mejor entendimiento de los principales conceptos de cálculo.

Se pretende lograr que los estudiantes transiten entre los diferentes registros de representación como son: la descripción verbal, el modelo físico del movimiento o simulación y la gráfica. El uso de simulaciones debe servir de guía al estudiante para avanzar en el uso de herramientas y la generación de significados hasta lograr una visión cualitativa de la situación planteada sobre el movimiento mediante el razonamiento covariacional.

Metodología

Elementos histórico-epistemológicos

Primeramente haremos un recorrido histórico-epistemológico del concepto de función con el objetivo de confrontar el tema de la evolución de dicho saber. Pretendemos con esto tener una visión más amplia del tema tanto en su contexto histórico como en el actual. El concepto de función, como muchos otros, no se desarrolla de manera aislada, sino que se conecta con otros conceptos, mostrando el contexto de los problemas en el que aparece, evidenciando que su desarrollo no ha sido lineal. Es a través de este recorrido que entendemos su evolución hasta el tiempo actual.

Este trabajo se basa en la hipótesis de que el aspecto trascendental de la idea de función es la idea de variación o más precisamente de covariación, esto es, la relación entre dos variaciones.

Los estudiantes tienen problemas para entender la idea de función como una relación entre las variables (una dependiendo de las demás). Los alumnos tienen una visión discreta de una función relacionando pares separados de números, en el que cada número puede considerarse como una entrada dando como resultado otro número; los alumnos piensan que existe una relación entre los números, pero la relación es formada separadamente para cada par. La cuestión es que la relación de dependencia entre las dos variables no es visible en el gráfico, que sigue siendo una representación estática de la pareja (x, y) y no permite el significado de dependencia entre las dos variables que más bien desempeñan un mismo papel.

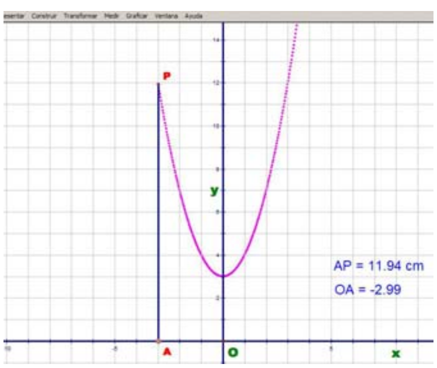
Consideramos que es importante comenzar en un entorno proporcionando una experiencia cualitativa de la dependencia funcional, independientemente de una distribución numérica. Un ambiente geométrico dinámico añade dependencia funcional y permite pensar las relaciones geométricas en esos términos.

Ya se ha comentado que la definición moderna de función ha abandonado el sentido de movimiento con el cual germinó. Como lo establece Tall (1996) *un propósito de la* *función es presentar como las cosas cambian*. En nuestra introducción ya se ha indicado como se pretende introducir en el estudiante la idea de función mediante simulaciones interactivas y herramientas de visualización.

Esta interpretación dinámica es a menudo descuidada, por no decir olvidada, en los libros de texto, en este ambiente una interpretación dinámica de un gráfico no puede ser experimentada, se convierte en una especie de experimento mental, imposible de ser compartida. A diferencia del entorno usual (papel y lápiz), en donde tiene que interpretarse el movimiento y el cambio, el ambiente geométrico dinámico nos permite experimentar y *manipularlos* para analizar la variación.

Elementos para el diseño

Una parte fundamental de este trabajo es el desarrollo de secuencias en un ambiente geométrico dinámico y que nos permitan estudiar cómo se desenvuelven los estudiantes y sus ideas. Para este fin introducimos la idea de gráfica basándonos en el trabajo original de Euler (1998), según el cual una gráfica de la función proporciona los medios para representar geométricamente una función numérica:



Gráfica de la función $f(x) = x^2+3$ mediante el método de Euler.

"[...] Porque, entonces, una línea recta ilimitada representa una cantidad variable de x, busquemos un método igualmente cómodo (útil) para representar cualquier función de x geométricamente.

[...] Por lo tanto cualquier función de x, geométricamente interpretada de esta manera, corresponderá a una bien definida línea, recta o curva, cuya naturaleza dependerá de la naturaleza de la función."

El método de Euler consiste en generar la trayectoria del extremo P de un segmento AP. Uno de los extremos, A es un punto variable del eje de las abscisas y tiene una distancia x desde el origen O. El otro extremo, P, esta sobre la línea perpendicular al eje de las abscisas pasando a través de P de modo tal que AP mide f(x).

La secuencia de actividades se basan en los siguientes principios:

1. Un aspecto fundamental del concepto de función es la idea de la variación, en particular la de covariación, esto es, especificar que existe una relación entre dos variables una dependiendo de la otra, ambas variando.

2. La metáfora primitiva de covariación es el movimiento, esto es, un cambio en el espacio respecto al tiempo.

3. Un ambiente geométrico dinámico, tal como Geometer's Sketchpad, puede proporcionar un dominio de espacio y tiempo dentro del cual la variación puede ser experimentada como movimiento.

4.- Existen dos ordenes que por su importancia en la creación de las secuencias deben de mencionarse:

> La orden Drag permite que el alumno no solamente experimente la combinación de dos movimientos interrelacionados (Covariación), sino que también experimenta con la dependencia entre los movimientos del punto básico y del punto construido
>
> La orden Trace (Traza, Rastro) nos permite pasear por o explorar la trayectoria o curva de la función.

Retomando a Tall (2004) consideramos tres mundos distintos pero interrelacionados de pensamiento matematico con su propia secuencia de desarrollo de sofisticación, y su propia secuencia de desarrollo para la obtención de la verdad. Estos mundos abarcan el rango de crecimiento de las matemáticas desde los recién nacidos a las matemáticas hasta los investigadoresde los investigadores matemáticos.

Corporizar se refiere a construir conocimiento fundamentalmente sobre la percepción sensorial (primer mundo), en oposición a la operación simbólica (segundo mundo) y a la deducción lógica(tercer mundo).

En particular el primer mundo surge de la *percepción* de nuestro entorno y se compone de nuestra forma de pensar acerca de las cosas que percibimos y su sentido, no sólo en el mundo físico, sino también en el mundo mental de significados. Este mundo corporizado comienza con nuestras interacciones con el mundo físico a través de nuestros sentidos, pero, a través de la introspección que gradualmente desarrolla ideas más sofisticadas que mantienen sus vínculos con la percepción de nuestros sentidos.

Resultados y Discusión

En esta etapa de nuestra investigación contamos con un profundo estudio del desarrollo histórico-epistemológico de concepto de función, lo cual nos permite situar y contextualizar la problemática que estamos abordando. A partir de lo anterior hemos comprobado que la función, como concepto esta asociado al trabajo matemático, pero como noción funcional juega un papel fundamental en otras áreas de conocimiento. Sin embargo, no fue creado, ni usado para transmitirse con intenciones didácticas, es decir, para los maestros ni para los estudiantes. Es tarea nuestra adaptarlo (transponerlo) para un mayor entendimiento en la comunidad escolar.

Nuestra definición ha cambiado porque la matemática ha cambiado. Bastaría con mencionar que los padres del cálculo (Newton y Leibniz) lo inventan o desarrollan cuando el concepto de función aún estaba en cierne. Hoy en día todos los cursos de cálculo están basados en el concepto de función.

Por otra parte hemos dado inicio a la elaboración de secuencias que permitan mediante el ambiente geométrico dinámico y con el enfoque covariacional, apoyados por la tecnología y el uso de la simulación por computadora, dotar al alumno de las herramientas necesarias para desarrollar un pensamiento covariacional relacionado a la noción de función que le permita transitar a los otros dos mundos que menciona Tall (2004).

Conclusiones

La intención de este trabajo es que los alumnos comprendan la variabilidad del movimiento. La hipótesis principal es que a partir de que el alumno observe y actué en el ambiente geométrico dinámico, inducido por la secuencias que se le presenten, surja la idea del razonamiento covariacional. Todo esto con la visualización y la acción manipulativa (Drag o Arrastre) del alumno sobre puntos específicos en la pantalla. Mediante la idea de trayectoria se busca recuperar la interpretación dinámica de la noción de función de nuestros ancestros, insistiendo en la relación asimétrica de covariación entre variables.

Reconocimientos

A las autoridades del COSNET por el apoyo recibido (Primer Autor) para mis estudios doctorales. Beca N° 002006260 C .

Bibliografía

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales".* 42, 353-369.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 352–378

Chimal R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación.* Tesis de Maestría. CINVESTAV del IPN, México.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, Covariation and their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education* , 26 (1), 66-86

Euler, L. (1988). *Introduction to Analysis of the Infinite. Book I-II*. **(**Blanton, J., Trad.). New York, USA., Springer Verlag, (Trabajo original publicado en 1748).

Farfán, R. y García, M. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. *18,* 489–493.

Falcade, R., Laborde, C. y Mariotti, M. (2004). Towards a definition of function. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 367-374.

Falcade R., Laborde C. y Mariotti M. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*. 66,317–333.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17,45-50.

Kaput, J. (2002). Changing representational infrastructures changes most everything: The case of SimCalc, algebra & calculus. In K Heid y G Blume (Eds), *Research on the impact of technology on the teaching and learning of mathematics* (47-75) Mahwah, NJ, US : Erlbaum

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282–300

Nieves, A. (2005). *Una metodología de trabajo para estudiar las situaciones de cambio en problemas geométricos que se consideran como problemas de máximos y mínimos*. Tesis de Doctorado. CINVESTAV del IPN, México.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification -- the case of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)***.** Washington: Mathematical Association of America.

Sierspinska, A. (1992). On the understanding the Notion of Function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)***.** Washington: Mathematical Association of America.

Suárez, L. (2000). *Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo*. Anteproyecto de investigación doctoral presentado del DME del Cinvestav-IPN

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning, Macmillan*, New York, 495-511.

Tall, D. (1996). Function and Calculus , En Bishop A.J. et al. (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289 – 325). Netherlands: Kluwer Academic Publihers.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Norway

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.