El lenguaje algebraico en la escuela: cómo conseguir un equilibrio entre investigación y práctica

M.ª Ángeles Ortiz Capilla
Catedrática de Matemáticas de Instituto de Educación Secundaria

Desde el comienzo de los ochenta, la investigación en didáctica del álgebra ha ido en aumento; sin embargo, dicha investigación ha tenido un impacto pequeño en la actividad diaria en nuestras aulas. Esta situación se debe probablemente a que la difusión de los resultados no existe o es muy escasa y a que, en términos generales, los temas investigados están bastante alejados de las preocupaciones habituales del profesorado. En este artículo se pretende plantear, presentado algunos ejemplos prácticos, algunas preguntas sobre su enseñanza que han sido escasamente discutidas en el campo del álgebra escolar.

1. LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA VA EN AUMENTO

En las dos últimas décadas, la enseñanza y el aprendizaje del álgebra ha sido un tema destacado en las investigaciones didácticas. A través de ellas se han dado a conocer algunas de las dificultades que tienen los alumnos y alumnas de los distintos niveles respecto a los conceptos algebraicos: las diferentes interpretaciones que hacen del uso de las letras (incógnita, número generalizado, variable, objeto, etc.), los convenios de notación, los diferentes usos del signo igual, la naturaleza de la respuesta, el concepto de variable, la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje algebraico, las cuestiones relacionadas con el planteamiento y resolución de ecuaciones, las características de los problemas de enunciado con resolución algebraica y muchas otras más.

A las dificultades anteriores, Arzarello, Bazzini, Chiappini (1995) añaden que algunos alumnos y alumnas no manejan el «significado» de los símbolos que han aprendido formalmente porque, además de ignorar el significado de las fórmulas y conceptos, inventan significados que sustituyen a los auténticos; y que otros alumnos y alumnas, incluso los diestros en los cálculos algebraicos, utilizan el álgebra sólo como una máquina de cálculo y no como una herramienta apta para comprender generalizaciones, captar conexiones estructurales y argumentar en matemáticas.

Y señalan que, desde un punto de vista didáctico, es muy difícil superar tales dificultades y errores conceptuales, fundamentalmente, porque el significado inventado suele tener sus propias justificaciones y está inspirado en modelos previamente aprendidos.

2. SE DAN IDEAS PARA TRATAR EL TEMA

En la actualidad, se tiene una amplia información sobre las dificultades del aprendizaje del álgebra y sobre posibles alternativas para plantear su enseñanza. En *Approaches to Algebra* (1996), la comunidad internacional recomienda las estrategias más adecuadas para hacer más significativo el aprendizaje del álgebra:

- La generalización de secuencias numéricas y modelos geométricos.
- La generalización de las leyes que intervienen en las relaciones numéricas.
- La resolución de problemas.
- La resolución de ecuaciones con soporte concreto.
- La introducción en situaciones funcionales.
- La creación de modelos de fenómenos físicos y matemáticos.

Y asocia estas estrategias y los fundamentos teóricos subyacentes a diferentes concepciones (explícitas o, más a menudo, implícitas) del álgebra:

- Estudio de un lenguaje y su sintaxis.
- Estudio de procedimientos de resolución de ciertos tipos de problemas.
- Herramienta para resolver problemas específicos y para expresar soluciones generales.
- Estudio de regularidades que rigen las relaciones numéricas.

– Generalización que puede ser ampliada añadiendo componentes de demostración y validación.
– Estudio de relaciones entre cantidades que varían.

En esta misma obra se destaca la importancia de todas y cada una de ellas que, en opinión de Bell y Vergnaud, solamente un equilibrio entre las diferentes concepciones y la presentación de situaciones significativas variadas puede capacitar a los alumnos y alumnas para comprender profundamente la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos fundamentales como el de variable, y el uso del razonamiento algebraico (saber aplicarlo en contextos donde la manipulación algebraica pueda ser útil).

3. EN NUESTRO ENTORNO ESTAS IDEAS SE HAN TENIDO POCO O NADA EN CUENTA

En la actualidad, de todas las posibles aproximaciones sugeridas, la que se sigue eligiendo de forma preferente es la de aprendizaje y práctica del lenguaje algebraico y su sintaxis. Pero, a esto último no se le dedica el tiempo necesario para conectar estas ideas con las prealgebraicas que los alumnos y alumnas han desarrollado en la escuela primaria, lo que hace que fallen al dar significado al nuevo simbolismo y se limiten a realizar operaciones sin sentido sobre símbolos que no entienden (Herscovis y Linchevski, 1994).

El álgebra escolar en nuestro país no ha cambiado mucho en los últimos veinte años y, para rafificarlo, basta con echar un vistazo a los nuevos textos de secundaria y comprobar que no han tenido en cuenta las graves dificultades cognitivas implicadas en el aprendizaje de este tema, ni los nuevos enfoques recomendados para su enseñanza.

Y, aunque en la mayoría de los libros de texto hay menos ejercicios de aplicación de destrezas algebraicas sin contexto, su reducción parece deberse más a la moda o a la disminución del número de horas de clase semanales de matemáticas, que al aumento de actividades que pretendan dar significado a los conceptos y procedimientos que se estudian, o que permitan tratar algunas de las dificultades, como el problema que se plantea con el doble sentido de la igualdad o el obstáculo de la letra como objeto, por poner sólo algunos de los ejemplos más conocidos.

También se observa falta de información cuando la presencia de actividades de generalización va acompañada inmediatamente de «una» solución, dando a entender que esa respuesta es única, inutilizando, en consecuencia, las ventajas que ofrece este tipo de actividades. O cuando, intentando estar a la última en didáctica, se sigue la moda del aprendizaje a partir de la resolución de problemas y esto sólo se refleja en un aumento en la cantidad de problemas, pero para resolverlos basta con aplicar destrezas recién aprendidas o con hacer una traducción literal del enunciado o, simplemente, utilizar métodos aritméticos.

4. A VECES, LAS RECOMENDACIONES NO SON SUFICIENTES

Aunque los resultados de las distintas investigaciones se vieran reflejados en los materiales curriculares o en los libros de texto, aún habría problemas que se plantearían de forma puntual en una clase a los que, con frecuencia, no podría dar respuesta la investigación en didáctica, que generalmente se basa en planteamientos más teóricos y bastante alejados de la realidad y que cuando desciende a lo concreto se limita a hacer una descripción de los hechos o a clasificar los problemas implicados en el aprendizaje. Hay pocas investigaciones que ayuden a poner en práctica remedios para solucionar los problemas planteados, debido fundamentalmente al poco contacto que hay entre investigadores y docentes, pues los investigadores están bastante alejados de los problemas planteados en el aula y los profesores y profesoras no tienen información sobre los resultados de las investigaciones o tienen poca fe en ellos.

En los casos siguientes –correspondientes todos ellos a alumnos y alumnas de 3.º de ESO, salvo el que figura en segundo lugar que corresponde a un alumno de 1.º de BUP– se tratan algunos de los problemas a los que el docente necesita dar respuesta de forma inmediata y a los que la investigación en didáctica del álgebra, tal y como está planteada en la actualidad, no puede resolver.

Caso 1

María 14 años

Para resolver el problema del caso 1, María ha utilizado un método aritmético y en el proceso seguido para obtener la solución se observa este error:

$$120 - 75 = 45 : 5 = 9$$

que, aunque en aritmética no lleva a una solución incorrecta, llevaría al fracaso si estuviera utilizando el lenguaje algebraico.

En la igualdad anterior no se está usando el signo igual para vincular expresiones equivalentes, sino que se está utilizando para seguir un razonamiento deductivo encadenado mediante el signo igual. Este uso incorrecto del signo igual no se va a modificar sólo por el hecho de hacer notar que es un error o dando por no válida la respuesta, sino que hay que practicar, como sugiere McGregor (996), la escritura e interpretación del signo igual como un signo de equivalencia lógica y no sólo como símbolo que se utiliza para dar una respuesta. Desde el punto de vista del docente, a partir de esta situación habría que plantearse algunas preguntas:

– ¿Cómo se traduce esta idea en una actividad escolar inmediata?
– ¿Es posible dar el salto a la resolución del problema utilizando un planteamiento con el lenguaje del álgebra?
– ¿Es necesario que este problema, que está planteado en el tema de álgebra, lo tengan que resolver los alumnos y alumnas utilizando un lenguaje simbólico?

Caso 1

Teniendo en cuenta el plan de una fábrica de coches, deben construirse 40 coches diarios. Sin embargo, si cada día se fabrican 5 coches más, tres días antes del final sólo quedan 75 coches por hacer. ¿Cuántos días tenían que trabajar según el plan inicial? ¿Cuántos coches tenían que construir en total?

40 coches diarios
si cada dia 5+
3 antes del fial 75 caches quedan

-120 coches en un principio les quedarian 3 dias
antes y sumando 5 a los 40 de cada dia todos
los dias les quedan 75; 120 - 75 = 45 : 5 = 9
- Según el plan inicial tendrian que trabajar
12 días.
- 12 x 40 = 480 tenían que construir

Caso 2

Enrique, 17 años

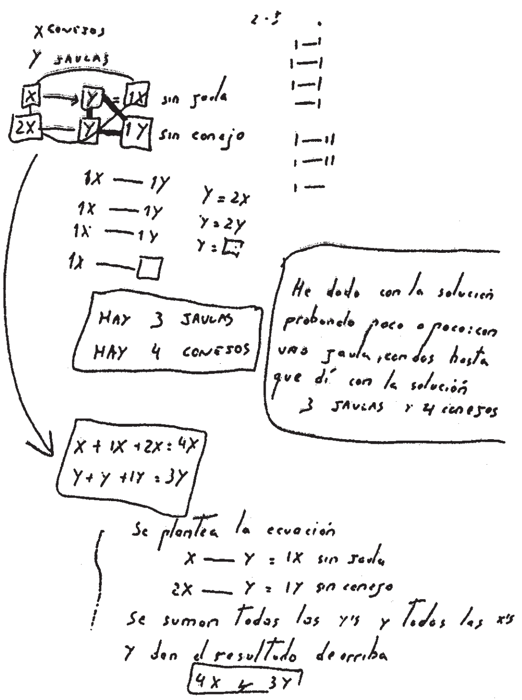
Este alumno ha llegado a la solución correcta del problema del caso 2 utilizando un dibujo y un recuento sistemático. No le ha sido difícil llegar a ella porque los números utilizados en el enunciado son pequeños. Sin embargo, en su intento por «algebrizar» la situación presenta un «cuadro sintomático» que incluye prácticamente todos los errores que pueden aparecer al utilizar el lenguaje algebraico:

– Letra como objeto: 4x (4 conejos).
– Uso indebido del signo igual: y = 2x
– Interpretación incorrecta de los convenios de notación en álgebra: 2x no indica el doble del número de conejos.
– Traducción literal desde los «palitos» a las x's o a las y's.
– La ecuación vista como una expresión con símbolos literales y con un signo igual y no como equilibrio.
– Desconocimiento de los métodos algebraicos para resolver un problema de enunciado y un sinfín de errores más.

– ¿Por dónde hay que empezar con este alumno?
– ¿Es realmente un caso perdido para el álgebra como parece?
– ¿Se le podrá convencer de la incorrección de los símbolos aunque haya llegado a una solución correcta?

Caso 2

Tenemos varios conejos y varias jaulas. Si ponemos un conejo en cada jaula nos quedará un conejo sin jaula. Si ponemos dos conejos en cada jaula nos quedará una jaula vacía. ¿Cuántos conejos y cuántas jaulas hay?



Caso 3

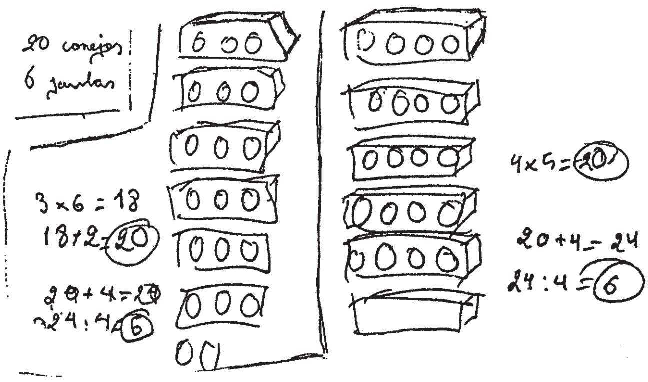
Inmaculada, 15 años

En el enunciado del caso 3, bastante parecido al anterior, los números son pequeños, aunque un poco más grandes que los del enunciado anterior, por eso Inmaculada también ha podido resolverlo utilizando un dibujo. Esta forma de resolver el problema es útil y lleva fácilmente a un planteamiento algebraico, pues el dibujo le sirve de ayuda para comprender lo que está ocurriendo en el enunciado. (Thaeler, 1986.)

No es difícil que, a partir de lo que tiene escrito, identifique las variables, ni que escriba las ecuaciones, pero cuando se le pide que lo haga no está de acuerdo en hacerlo de nuevo por otro método, porque considera que el problema ya está resuelto. ¡Y lo está!

– ¿Cuál es el paso sigiente para que, a partir de esta forma de resolverlo y de la notación utilizada, se llegue a la simbolización correcta de este problema?
– ¿Hay que empeñarse en que simbolice este problema o que lo haga con otro que, aunque de estructura similar, tenga números más grandes?

Caso 3
En una granja vecina había también conejos y jaulas, pero la situación era diferente: si colocaban tres conejos en cada jaula quedaban dos conejos sin jaula y si colocaban cuatro conejos en cada jaula quedaba una jaula vacía. ¿Cuántos conejos y cuántas jaulas había?



Caso 4
Javier, 14 años
Al resolver el problema del caso 4, el alumno se sorprende de que, si lo intenta resolver planteando ecuaciones, no hay forma de encontrar una segunda ecuación que se ajuste al modelo del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, y por eso recurre a otros métodos, en este caso, completar una tabla con posibles valores, lo que permite que afloren errores conceptuales como por ejemplo:

La comparación estática, en palabras de Clement (1982). Como la variable «y» va multiplicada por 2, necesita que esta variable sea múltiplo de 2 y no así la otra más 14.

También se ve que lo único que va buscando al dar valores en la tabla es la segunda ecuación y la encuentra, según la propia expresión del alumno, en cuanto puede escribir una igualdad: 14 = 14.

– ¿Cómo superar la comparación estática?
– ¿Por qué elige 14 = 14 para escribir la igualdad?
– ¿Cuál es el siguiente paso para que, utilizando la tabla, se dé cuenta de que la respuesa no es única?
– ¿Cómo incidir en la práctica, de forma que no se induzca a reproducir modelos inevitables? (Dos variables sólo pueden estar presentes en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.)

Caso 4

Dos amigas que estaban conversando se preguntan por la edad de sus hijas. Una de ellas contesta: mi hija dentro de 7 años tendrá el doble más tres años de edad que tenía la tuya hace 5 años. ¡Ah! Contesta la otra. Y siguen con su charla. ¿Puedes tú saber la edad de las dos chicas? ¿Lo podía saber la señora que preguntaba? ¿Por qué?

x= edad de la que contesta
y = edad de la otra

$x+7=(y-5)\,2+3$

$x+4=2y-10$

$x+14=2y$

Solo sacaba esta ecuación, pero la otra que nos falta para hacer el sistema no la sacaba y la hice por tabla.

Creo que la "y" tiene que ser un número positivo y divisible entre 2. Así que hago una tabla con números divisibles con 2.

— Significa que no sale.

y	x
2	—
4	—
6	—
8	2
10	6
12	10
14	14
16	18
18	22
20	26

En la la tabla al salir 14 y 14 una ecuación que puede salir es $x+7=(y-5)2-3$ y te sale ~~14~~

$x=y$

Caso 5

Cristina, Sara, Diego, Néstor...

Al intentar responder a la pregunta que se presenta en el caso 5 aparecen respuestas muy variadas, que se resumen en los siguientes apartados:

Caso 5

Elige un número natural, elévalo al cubo y resta el número elegido ¿Qué obtienes? ¿Por qué?

– Algunos alumnos se limitan a sacar algunas conclusiones, observando únicamente los números que utilizan y el resultado que obtienen, como por ejemplo:

«Cuando utilizo números que terminan en 2 o en 7, la cifra que obtengo al final es un 6, cuando terminan en 3 o en 8, la cifra que obtengo al final es un 4 y cuando acaban en 1, 4, 5, 6 o 9, la cifra que obtengo es un 0.»

– Otros llegan a sacar que el resultado es múltiplo de 2 y de 3.

– Otros, que es múltiplo de 6.

– Muy pocos llegan a utilizar de forma espontánea el álgebra para llegar a alguna conclusión y cuando lo hacen les faltan recursos de simbolización y se limitan a dar una regla con palabras abreviadas. Un ejemplo de simbolización es la siguiente:

[(el n.º x el n.º anterior) + n.º anterior] x n.º

– Otro alumno no sólo llega a la conclusión deseada, sino que ve el doble sentido de la igualdad y disfruta con ello. Su nivel de destrezas algebraicas es tan alto que al obtener expresiones equivalentes a partir de manipulaciones operativas de los símbolos aumenta su grado de comprensión sobre lo que ahí estaba ocurriendo (Arcavi, 1995).

EL NÚMERO $n^3 - n$ SE PUEDE OBTENER ADEMÁS MULTIPLICANDO TRES NÚMEROS CONSECUTIVOS

$$\boxed{n^3 - n = (n-1)(n)(n+1)}$$

POR TANTO LA MULTIPLICACIÓN DE TRES NÚMEROS CONSECUTIVOS PODRÍA SIMPLIFICAR HASTA OBTENER LA FÓRMULA QUE YO HE CONSIDERADO "ORIGINAL"

$$(n^2 - n)(n + 1)$$

$$n^3 - n^2 + n^2 - n$$

$$\boxed{n^3 - n}$$

– Ante tal variedad de niveles dentro de la clase, ¿es posible dar a cada alumno la respuesta adecuada para que todos avancen en la actividad algebraica?

Caso 6

Francisco, 17 años

Esta actividad del caso 6, tan bien realizada, corresponde a un alumno repetidor, dos años en 1.º de BUP y un año en 3.º de ESO, de aspecto deprimido, poco integrado, al que ninguna actividad hasta el momento le ha interesado, todo le suena pero piensa que no sabe nada. Por fin, con esta actividad, en el mes de febrero, cambia su relación con las matemáticas. Las actividades que le motivan son las actividades en las que está presente la generalización.

– ¿Por qué esta actividad motiva a este alumno?

– ¿Cuál es la siguiente actividad que hay que facilitarle para que siga motivado?

– ¿Hasta qué momento hay que seguir utilizando actividades «visuales»?

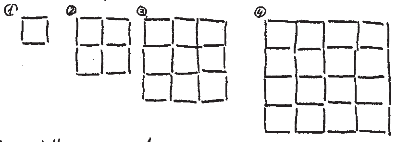
– ¿Es la ampliación del espacio social (en este caso al padre), del que hablan Arzarello y otros (1996), lo que ha hecho que realice la actividad de forma correcta?

– ¿Ha incluido el que el éxito se haya producido en el campo del lenguaje algebraico, con tanto prestigio en la escuela, para considerar que era capaz de realizar otras actividades matemáticas?

Caso 6

CUADROS CON PALILLOS

– Observa la siguiente sucesión de cuadrados



¿Cuantos palillos forman las figuras?

Fig 1: → 4 palillos   Fig 4: → 40 palillos.

Fig 2: → 12 palillos

Fig 3: → 24 palillos.

¿Y para 20?

$4+[(20-1)\times 2]\times 3+[(20-1)^2\times 2]=$

$4+(38)\times 3+(361\times 2)=$

$4+114+722=$ $\boxed{840 \text{ palillos.}}$

¿Y para 1000?

$4+[(1000-1)\times 2]\times 3+[(1000-1)^2\times 2]=$

$4+(1998)\times 3+(998001\times 2)=$

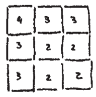
$4+5994+1996002=$ $\boxed{2002.000 \text{ palillos}}$

– FÓRMULA –

$4+[(x-1)\cdot 2]\cdot 3+[(x-1)^2\cdot 2]$

4 más el producto de multiplicar por 3, el doble del nº de figuras menos 1, más el nº de figuras menos 1 al cuadrado por 2.

Me fijo en el nº de Palillos de cada linea:



 4 el 1er cuadrado

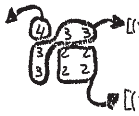
 $[(x-1)\cdot 2]$ los 4 treses

$[(x-1)\cdot 2]\cdot 3$ el resultado numerico de lo anterior.

 $(x-1)^2$ el nº de doses.

$[(N-1)^2\times 2]$ el resultado numérico.

4



$[(x-1)\cdot 2]\cdot 3$

$[(x-1)^2\cdot 2]$

– Para realizar este trabajo he necesitado la ayuda de mi padre, para averiguar e idear esta fórmula.

NOTA:
(EL PADRE DE FRANCISCO SOLO TIENE ESTUDIOS PRIMARIOS Y CUIDA UNA FINCA)

Caso 7

Profesores y profesoras de cualquiera edad y procedencia

A pesar de todas las sugerencias sobre la actividad algebraica que hay que realizar, casi todos los alumnos tendrán que responder a una pregunta como la que se presenta en el caso 7.

Y siempre cometerán el fallo en el mismo sitio:

– ¿Por qué es esta la pregunta clave que se utiliza para valorar el dominio del lenguaje algebraico cuando parece evidente que el error cometido no es propio del simbolismo algebraico sino que procede del uso incorrecto del signo menos y de los paréntesis en la aritmética?

– ¿Por qué se pone este ejercicio si se sabe que el error que ha cometido esta alumna en el signo es un error que cometen prácticamente todos los alumnos y alumnas?

– ¿Por qué si no se incluye un ejercicio de este tipo en una prueba escrita para valorar la actividad algebraica otros compañeros y compañeras, e incluso los propios alumnos y alumnas, considerarán que el álgebra que se está enseñando no es la adecuada?

Caso 7

Calcula x en la siguiente ecuación:

$$\frac{2x + 4}{5} - \frac{3x - 6}{10} = \frac{x + 3}{6} + \frac{x - 2}{2}$$

mcm (5,10,6,2) = 30.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{12x+24}{30} - \frac{9x-18}{30} = \frac{5x+15}{30} + \frac{15x-30}{30}$$

$$12x+24-9x+18 = 5x+15+15x-30$$

$$12x-9x-5x-15x = 15-30-24+18$$

$$-17x = -11$$

$$x = \frac{-11}{-17}$$

$$x = \boxed{\frac{11}{17}}$$

5. ¿ES POSIBLE HACER ALGÚN CAMBIO EN EL PANORAMA ACTUAL?

La reflexión sobre la enseñanza del álgebra en los niveles de secundaria tiene que tener en cuenta, además del contenido y el aprendizaje (Kieran, 1992), otros factores que configuran la dinámica de la clase. La problemática planteada ante cualquier situación hay que resolverla en concreto y para un alumno o grupo de alumnos y alumnas determinado.

Las preguntas que se han hecho anteriormente intentan conectar con los interrogantes que se plantearía el docente en una situación determinada; pueden parecer muy concretas e inseparables de los problemas que las han provocado, pero responden a una realidad del aula y, sobre todo, surgen ante una necesidad del profesor o profesora y, por lo tanto, tienen detrás de ellas su interés y motivación para contestarlas.

Con esto no se pretende insistir en la utopía del profesor investigador, inviable en las condiciones de trabajo en que ha de desarrollar su labor profesional. Por el contrario, es necesario que los resultados de la investigación didáctica lleguen al profesorado de una forma concreta, ligados a sus problemas, sin que le exijan sumergirse en sus complejas consideraciones y sus exhaustivos análisis que, por otra parte, tienden más a estudiar los problemas que a sugerir soluciones, problemas que los profesores y profesoras suelen conocer bien aunque no siempre conozcan su causa.

Los resultados de las investigaciones en didáctica del álgebra deben llegar de forma adaptada al profesorado teniendo en cuenta sus necesidades concretas y el contexto general de su trabajo, que debe atender múltiples y variados aspectos de su profesión, al contrario del investigador que centra su trabajo en aspectos que para el profesor pueden ser muy puntuales.

En este sentido, un factor clave para la conexión entre los colectivos de profesores e investigadores es la disponibilidad de materiales didácticos que incorporen los resultados de la investigación en un contexto de actividades cercano al trabajo habitual del profesor, que contengan orientaciones y preguntas y que le animen a fomularse las suyas propias con decisión y sin recurrir a respuestas simplistas relacionadas con la actitud o la capacidad de los alumnos y alumnas, sino que busquen la reflexión y les abran a las «otras» concepciones del álgebra. Con esta idea está realizado el *Proyecto Azarquiel de materiales curriculares para la ESO* (1996).

Los materiales didácticos deben hacer presentaciones variadas de las actividades para facilitar que se adapten mejor a las características individuales de los diferentes alumnos y alumnas (como el alumno «visual» del caso 6) y plantear situaciones abiertas para que, por ejemplo, como en el caso 4, no se busque inevitablemente el sistema de ecuaciones.

Las actividades deben también animar a los profesores y profesoras a fomentar la interacción entre los estudiantes de forma que los resultados personales se expongan y se discutan en grupos pequeños y con toda la clase para que surja la necesidad de un lenguaje común prealgebraico o algebraico. Es necesario que esta notación personal intermedia sea valorada por el profesor y el esfuerzo para producirlo y los éxitos obtenidos, reforzados, para darle seguridad en sus capacidades. Y cuando sea posible, hay que poner de manifiesto la relación de su lenguaje con el algebraico, en definitiva, aprovechar sus resultados para «algebrizar» su notación.

El problema de los alumnos y alumnas que obtienen un buen resultado para un problema concreto con un método inadecuado debe tenerse en cuenta en los materiales didácticos y en la labor del docente. En este punto, puede ser adecuado el recurso de aumentar el tamaño de los datos o de evaluar las expresiones (como en el caso 1) para hacerle pensar, y, en general, para llevar a situaciones contradictorias que, sin dejar de valorar sus resultados, les planteen la duda y el conflicto.

Este escrito está dedicado a todos los alumnos y alumnas como Daniel, a quien nada de lo que se hizo en clase le interesó y que, como tiene que estar con nosotros durante un tiempo, nos motivará a pensar qué lenguaje algebraico quiere aprender y cómo podemos conseguir que lo haga.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A. (1995): *El sentido de los símbolos. Generación de intuiciones en matemáticas formal.* Actas de las VII JAEM, págs. 77-83. Madrid.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G. (1995): «The construction of algebraic knowledge: towards a socio-cultural theory and practice». *Proceedings of the 19th International Conference for Psychology of Mathematics education.* Recife. Vol I. págs. 119-134. Brasil.

BEDNARZ, N., KIERAN, C., LEE, L. (1996): *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching.* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

CLEMENT, J. (1982): «Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception» en *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 13, n. 1, págs. 16-30.

GRUPO AZARQUIEL (1986): *Proyecto Azarquiel de materiales curriculares para la ESO.* Latorre y Universidad Autónoma de Madrid. Madrid.

HERSCOVICS, N., LINCHEVSKI, L. (1994): «A cognitive gap between arithmetic and algebra» en *Educational Studies in mathematics.* Vol. 27, págs. 59-78.

KIERAN, C. (1992): «The learning and teaching of school algebra» En D.A. GROWS (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* MacMillan Et N.C.T.M. Nueva York.

MCGREGOR, M. (1996): «Aspectos curriculares en las materias de aritmética y álgebra» en *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* n. 9, págs. 65-69.

THAELER, J.S. (1986): «A New Solution to an Old Problem-Solving Word Problems in Algebra» en *Mathematics Teacher.* Vol. 79, n. 9, págs. 682-689.

NOTA: Artículo extraído de *Uno. Revista Didáctica de las Matemáticas,* n.º 14, págs. 47-60, oct. 1997, Barcelona.