EL PENSAMIENTO y EL LENGUAJE EN LA MATEMÁTICA

Prof. Robinson Arcos

Facultad de Ingeniería
Universidad Central de Venezuela

TABLA DE CONTENIDOS

1

EL PENSAMIENTO CIENTÍFICO PRETENDE EXPLICAR LA REALIDAD

La capacidad de soslayar una dificultad, de seguir un camino indirecto cuando el directo no aparece, es lo que coloca al animal inteligente sobre el torpe, lo que coloca al hombre por encima de los animales más inteligentes, y a los hombres de talento por encima de sus compañeros, los otros hombres.

GEORGE POLYA

Un principio básico en la ciencia, es que ninguna conjetura debe aceptarse sin motivos que la justifiquen. En las ciencias empíricas, que incluyen las Ciencias Naturales, la Medicina y la Sociología, los motivos de aceptación de una conjetura consisten en la concordancia entre las predicciones basadas en la teoría y la evidencia obtenida por un experimento o por una observación sistemática. En la Psicología, la Sociología y la Economía, tales aceptaciones están basadas en la Estadística, y en otras ciencias como la Teología y la Historia, las *"verdades"* están basadas en aproximaciones que, en el mejor de los casos representan una probabilidad más o menos válida.

En realidad, toda ciencia actúa mediante el enunciado y prueba de conjeturas (*explicación tentativa dada a un fenómeno observado),* y para probarlas utiliza un método adecuado, ***el Método Científico***. Tomemos un ejemplo interesante de fenómeno de migración de especies, estudiado por Ecólogos y Naturalistas:

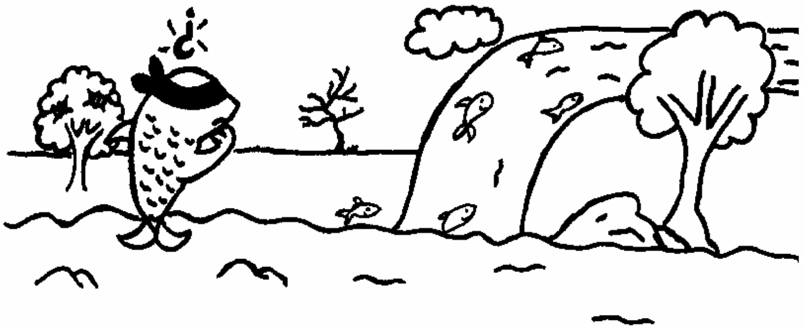
El salmón plateado, incuba sus huevos en las aguas de los arroyos del área Noroeste de la costa pacífica de los Estados Unidos. Al nacer, los pececillos nadan corriente abajo hasta llegar al Océano Pacífico, donde permanecen hasta por cinco años creciendo y alcanzando su madurez sexual. Luego, respondiendo a un estímulo no determinado, regresan a poner sus huevos a los arroyos de agua dulce donde nacieron.

He aquí un fenómeno observado que despierta curiosidad. *¿Cómo pueden encontrar los peces con exactitud el arroyo donde nacieron?.* Para lograrlo, algunos de estos peces tienen que nadar sobre caídas de agua de considerable altura y cubrir distancias tan largas que llegan hasta el estado de Idaho (aproximadamente 1.500 Km).

Los científicos han establecido innumerables conjeturas para explicar este fenómeno :

> *Quizás, este pez encuentre el camino hacia su arroyo natal al reconocer objetos que vio cuando iba corriente abajo rumbo al mar, ó quizás reconozca el sabor ó el olor del arroyo donde nació.*

Estas y otras conjeturas son posibles, imaginemos que un ecólogo intenta probarlas, entonces acepta como método el diseño de un experimento científico que le permitirá probar sus conjeturas. Pero *¿cómo prueban estos experimentos las conjeturas?*, la respuesta para él es muy simple: *un experimento prueba una conjetura verificando si las predicciones que se derivan de la misma son correctas.* Consideremos por ejemplo la primera, la cual intenta explicar la habilidad del salmón para encontrar el arroyo donde nació únicamente por su habilidad para reconocer objetos visualmente. Si esta conjetura es correcta, un salmón al que se le obstruyera la visión, no podría encontrar el arroyo donde nació.



Este razonamiento podría esquematizarse formalmente así:

Hipótesis: *Sí ... el salmón utiliza únicamente el estímulo visual para encontrar el arroyo donde nació con el fin de poner sus huevos,*

Predicción: *Entonces ... un salmón al que se le impida ver mediante una venda no podrá retornar al arroyo donde nació.*

Vamos a suponer que el pez encontrara el camino hasta su arroyo natal, aún cuando no pueda ver. Si el ecólogo presume que ningún factor (o variable) que pudiere cambiar los resultados se ha dejado de tener en cuenta, él podría afirmar que el proceso experimental probó que la conjetura era falsa. Supongamos por otra parte, que el pez con el impedimento visual no puede encontrar el arroyo donde nació. Este resultado no prueba la conjetura del estímulo visual. Sólo da apoyo a la conjetura. Esto nos lleva a formular una pregunta interesante: *¿cómo es posible que una serie de resultados experimentales puedan rechazar una conjetura y sin embargo no puedan probarla?* La respuesta a esta pregunta radica en la relación entre una conjetura y las predicciones que puedan derivarse de ellas. Esta relación constituye el marco o estructura principal del ***proceso de la deducción lógica.***

La deducción lógica (*a menudo llamada el razonamiento del* ***Si*** *y el* ***entonces****),* es la esencia de la matemática. Este razonamiento se evidencia, por ejemplo, en la geometría del plano:

> ***Si*** *dos puntos están en una misma recta y descansan en un plano,* ***entonces*** *esa recta descansa en el mismo plano.*

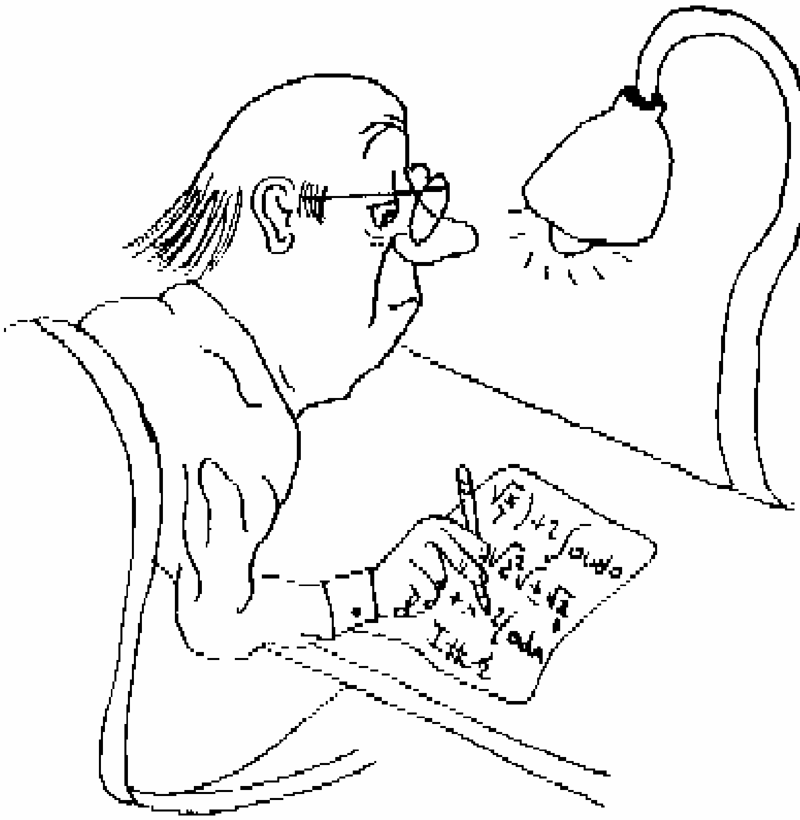
En otras ramas de la matemática también encontramos la deducción representando un papel no menos importante:

Si $a < b < c$, **entonces** $a + c < b + d$

S*i* $b < c$ *y* $a > 0$, **entonces** $ab < ac$

En las ciencias, y por supuesto en la Ecología, la deducción es tan importante como en la matemática, no obstante, existen diferencias muy notables sobre cómo se usa la deducción en la matemática y cómo se utiliza en una ciencia experimental. Los matemáticos generalmente trabajan con símbolos, no les incumben entidades físicas como el salmón migratorio. El matemático puede manejar los símbolos a su parecer y deseo, puede crear situaciones en sus pruebas en las cuales tenga la certeza de que se demuestre una sola conjetura y se hace una sola pregunta. Esta situación no existe para el ecólogo, el salmón que estudia no puede manipularse tan fácilmente, por lo tanto, el ecólogo no puede estar nunca absolutamente seguro de que sus experimentos han eliminado todas las variables que podrían influir en sus resultados. Cubrirle los ojos al salmón, por ejemplo, podría ocasionar que los animales usaran otro sistema sensorial para encontrar la ruta que persiguen, quizás usen normalmente los ojos para encontrar su camino, tal posibilidad parece remota. En el caso del salmón, es muy probable que dicha posibilidad lo sea, pero el hecho de que exista, aunque sea muy remota, debe ser objeto de reflexión constante para el ecólogo.

No podemos dejar de subrayar que las ciencias, a excepción de la matemática, tratan únicamente con *"verdades"* en términos de *probabilidades* y nunca en términos de *certeza absoluta. ¿Cuáles son los motivos que sancionan la aceptabilidad de una conjetura en la* *matemática?, ¿qué método utiliza el matemático para probar sus conjeturas?.* En la próxima sección intentaremos dar respuesta a estas preguntas, abriendo una discusión que nos permitirá comprender algunos aspectos sobre los Fundamentos de la Matemática y su método de trabajo.



2

LA VERDAD MATEMÁTICA Y EL MÉTODO AXIOMÁTICO

Una mañana, exactamente al amanecer, un monje budista comenzó la ascensión de una elevada montaña, siguiendo un estrecho sendero que serpenteaba alrededor de la montaña hasta un templo que, resplandeciente, brillaba en su cima.

El monje recorrió su camino con velocidad variable, deteniéndose muchas veces para descansar y tomar un poco de fruta seca que llevaba consigo. Muy poco antes de la puesta del sol llegó al templo. Pasados algunos días de ayuno y meditación, emprendió el camino de regreso, bajando por el mismo sendero por el que había subido, comenzando otra vez al amanecer, caminando con velocidad variable y haciendo a lo largo del día muchas pausas. Su velocidad promedio durante el descenso fue, evidentemente, mayor que su velocidad media de ascensión.

Demuéstrese que hay un punto en el sendero por el cual pasó el monje exactamente a la misma hora en los trayectos de ida y de regreso.

Nuevos Pasatiempos Matemáticos. Martin Garner

2.1 Intuición Inducción y Deducción

El enunciado que hemos presentado al inicio de esta sección, ilustra un determinado tipo de situación problemática en la que interviene el matemático. El problema del monje es un típico problema de punto fijo, de la rama matemática conocida como topología. Observe que el enunciado termina planteando un ***problema por demostrar***, esto es, bajo una serie de condiciones hipotéticas, se desea establecer (demostrar) la veracidad de una proposición que debe ser consecuencia (deducida) de las condiciones preestablecidas.

En la vida académica, ha sucedido que el profesor nos ha propuesto demostrar la *"veracidad"* de una proposición que nos parece evidente, la cual hemos utilizado constantemente sin previa *demostración*, como es el caso de la siguiente proposición:

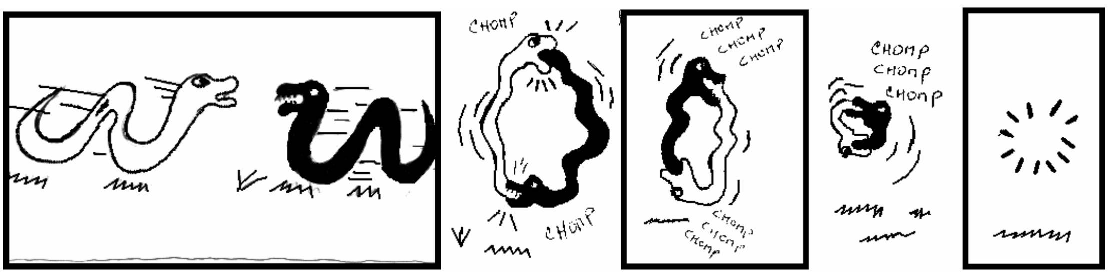
Si a, b y c son números reales, y a > b y b > c, entonces a > c

Para nosotros, esta proposición es evidente y nos sorprende que el profesor nos pida demostrar su veracidad. En realidad, cuando nos presentan esta proposición, no sentimos la necesidad de crear una cadena más o menos larga de razonamientos para poder afirmar que:

> *Si una cantidad es mayor que otra, y esta otra es mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera*

Pues, en base a un rápido proceso mental activo, aunque no crítico, *intuimos* que la proposición es verdadera, es la intuición la que nos hace *sentir* que la proposición es verdadera.

Aunque hay que reconocer que muchos logros en la ciencia se deben a la intuición, es necesario advertir que, por si misma, no basta para elaborar una ***teoría*** firme, pues, aunque es un proceso creador importante, puede conducirnos a conclusiones erróneas. El siguiente ejemplo ilustra una situación curiosa:



Es un hecho bien conocido que algunas serpientes pueden tragarse a otras, a veces más grandes que ellas mismas. Si se presume que ***la que es tragada desaparece de la vista****, la situación ilustrada sería una conclusión lógica.*

Una persona que intuya la veracidad de un hecho, no podrá convencer a otra de ello, y más si ésta es escéptica, por el solo hecho de intuirlo.

Volvamos a nuestra proposición y tratemos de aclarar esta limitación. Si le pidiéramos a un estudiante que explique el porqué de esta afirmación, es probable que su primer intento consista en repetir las ***premisas*** y la ***conclusión*** de la proposición, es decir, el dirá:

Pues, si a es mayor que b, y b es mayor que c, es evidente que a es mayor que c

Con esto no hará más que confirmar la *seguridad personal* en la verdad del resultado y se extrañará que los demás no la sientan y le nieguen la validez de su explicación. Si le insistimos, pudiera suceder que recurriera a ejemplos numéricos como:

Bueno si 5>3 y 3>1, está claro que el resultado 5>1 es el que se deduce

Este razonamiento no es todavía suficiente para probar la veracidad de la proposición. Procediendo de este modo no haríamos más que comprobar que la proposición es cierta cuando:

$$a = 5,\ b = 3 \text{ y } c = 1$$

Pero, objetivamente, no asegura nada para los otros valores numéricos de a, b y c. Quizás el estudiante intente probar ahora que la proposición es cierta no sólo en el caso numérico que ha elegido y esté dispuesto a repetir la comprobación con todos los datos que se nos ocurran, siempre que se cumplan las condiciones previas. Desafortunadamente podría comprobarlo para *muchos* casos, pero no para *todos* los posibles, pues lo limitado de su vida no se lo permitiría, y por lo tanto, siempre quedará la duda que *uno de los casos no considerado negara la proposición*.

2.2 Método Inductivo y Método Deductivo

Antes de continuar precisemos estas ideas: cuando el estudiante intenta demostrar la proposición experimentando con datos particulares para a, b y c, y de allí deduce que la proposición, es verdadera para todos los posibles valores de las letras, está haciendo uso del **método inductivo.**

El método inductivo implica llegar a una conclusión probable basándose en muchos casos particulares.

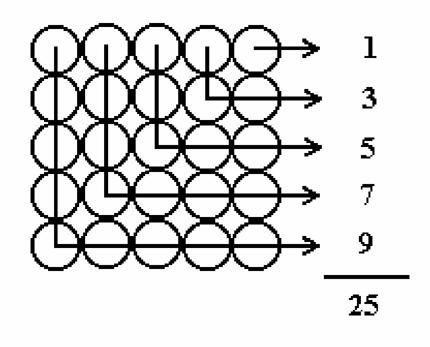
Supongamos que una persona prueba una manzana verde y encuentra su sabor agrio, prueba una segunda y también es agria. Una tercera y cuarta manzanas le producen igual sensación. De estas observaciones individuales y por separado se puede derivar una conclusión general:

Todas las manzanas verdes son agrias.

En el ejemplo anterior se nota, evidentemente, que en cuanto más observaciones haya, más confiables resultan las generalizaciones inductivas que puedan derivarse de ellas. Una generalización inductiva que se base en dos experiencias específicas es menos confiable que una que se base en diez o cien. Claro está, las generalizaciones inductivas nunca alcanzan una certeza absoluta, únicamente alcanzan un alto grado de probabilidad. El defecto que padece este proceso lógico, es que siempre cabe la posibilidad de encontrarnos con una experiencia que refute la conclusión, en nuestro caso, hay la posibilidad de encontrar una manzana verde que sea dulce.

A pesar de que el pensamiento inductivo no siempre nos lleva a resultados exactos, es realmente un método valioso para ***descubrir*** conclusiones posibles. Por ejemplo, basta una ojeada a la configuración plana de la siguiente figura, para convencerse de que la suma de números impares consecutivos que empiece por 1 es necesariamente un cuadrado.

Suponga que n representa el número de impares consecutivos comenzando desde el número 1:



$n = 1 \quad 1 = 1$
$n = 2 \quad 1 + 3 = 4 = 2^2$
$n = 3 \quad 1 +3 + 5 = 9 = 3^2$
$n = 4 \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$n = 5 \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Luego de estas pocas observaciones, podemos concluir la siguiente fórmula:

Para cada entero positivo n, $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$

cuya validez sólo puede ser demostrada de manera deductiva.

En general, en la vida diaria utilizamos frecuentemente el razonamiento inductivo en diferentes situaciones, pero es prudente hacerlo con cierta precaución. No se puede estar sujeto a normas o reglas que nos señalen la aplicación correcta de la inducción, sino que cada quien debe desarrollar la capacidad necesaria para emitir su propio juicio. Esta forma de razonamiento nos puede conducir a extremos ridículos. Por ejemplo:

> *Considere el caso de una persona que concluye que podría oír su radio de pilas durante toda su vida, sólo porque lo ha escuchado durante varias semanas*.

Este tipo de persona, el clásico optimista, es el extremo opuesto de otra que no ve razón alguna para esperar que el día termine sólo porque así ha ocurrido siempre.

Por lo tanto, inductivamente no es posible alcanzar certeza en las conclusiones. Esto sólo se conseguirá con el único instrumento que en el mundo del pensamiento opera válidamente: el **proceso de deducción lógica**. Se trata del llamado **Método Deductivo**, basado en los principios de la lógica adecuadamente reunidos y coordinados entre sí, y del cual, podríamos decir en otros términos:

Parte de proposiciones generales para llegar a conclusiones particulares

En términos del lenguaje matemático que luego aclararemos:

Parte de los ***postulados*** *para alcanzar los* ***teorema****s*

Veamos ahora como elaboramos la demostración de la proposición presentada al comienzo de la sección 2.1. Como paso previo, esquematicemos la proposición de la manera siguiente:

Premisas: i) a, b, c son números reales
ii) $a > b$
iii) $b > c$

Conclusión: $a > c$

Está claro que nuestra meta es obtener la conclusión a partir de las premisas (más otras verdades previas aceptadas a través de un razonamiento deductivo). Veamos como podría ser esto:

La premisa i) establece que los números con los que vamos a trabajar son números reales (universo de trabajo). Ahora, miremos las premisas ii) y iii), *¿qué significa $a > b$ y $b > c$?*. Para responder debemos hacer uso de La **definición de la relación mayor entre números reales.** Esta definición es la siguiente:

Dados dos números reales a y b, decimos que a es mayor que b, y denotamos esta relación por "$a > b$" si y sólo si, existe un número real positivo P tal que $a = b + P$.

Ejemplo1:

$$3 > -1 \text{ porque } 3 = -1 + 4$$

$$-2 > -5 \text{ porque } -2 = -5 + 3$$

Entonces las premisas ii) y iii) nos permiten contar con las igualdades

$$\mathbf{a = b + P_1 : P_1 \text{ positivo}}$$

$$\mathbf{b = c + P_2 : P_2 \text{ positivo}}$$

Observemos que hasta aquí estamos asumiendo que conocemos lo que es un número real, igualdad de números reales, y número real positivo. Prosiguiendo, haremos uso de una proposición ya aceptada:

Si sumamos miembro a miembro dos igualdades, resulta una nueva igualdad.

Y escribiríamos:

$$\mathbf{a + b = (b + P_1) + (c + P_2)}$$

lo cual es aceptado porque conocemos el uso del paréntesis.

En el segundo miembro de la igualdad, podemos aplicar las propiedades asociativa y conmutativa de números reales, para obtener:

$$\mathbf{a + b = b + (c + (P_1 + P_2))}$$

Usamos otra proposición aceptada:

Si restamos a cada lado de los miembros de una igualdad, un número real cualquiera, el resultado será otra igualdad.

En nuestro caso, restando b a cada miembro de la igualdad nos queda:

$$\mathbf{a = c + (P_1 + P_2)}$$

Otra proposición que podemos usar es la siguiente:

Si P_1 y P_2 son números reales positivos, el número $P = P_1 + P_2$ es también un número real positivo.

Con esto podemos expresar nuestra igualdad en la forma:

$$\mathbf{a = c + P \ : \ P \ \ positivo}$$

Al llegar a este punto finaliza nuestra cadena de razonamientos, recordando de nuevo la definición de relación mayor entre los números reales:

Como a es igual a c más el número real positivo P, la definición de relación mayor entre números reales nos permite concluir:

$$\mathbf{a > c}$$

Al seguir este proceso hemos probado la veracidad de nuestra proposición.

2.3 Definiciones, Conceptos Primitivos y Axiomas

En matemática se hace énfasis especial al razonamiento deductivo, y casi exclusivamente por el uso de él, podemos obtener pruebas de nuestras conclusiones. La fuerte insistencia en este aspecto caracteriza y distingue a la matemática de otras disciplinas. Un gran atractivo en el estudio de la matemática es que nos ofrece la ventaja de conocer y comprender un sistema deductivo en su forma más pura.

Esperamos que al llegar aquí el lector tenga una idea más o menos clara de como se prueban las conjeturas o proposiciones en la ciencia matemática y qué método utiliza para demostrarlas.

Nuestro interés ahora, es abordar el problema de cómo crear una ***teoría*** en matemática. Es posible que al final de nuestra discusión, hayan surgido de manera natural algunas preguntas, como por ejemplo:

¿ En que se sustentan las proposiciones que han sido previamente aceptadas para probar la veracidad de una proposición ?

Si la respuesta es:

Esas otras están sustentadas en otras que están previamente aceptadas.

Entonces, *¿cuándo termina este proceso de apoyo?* y de terminar en algún momento, *¿en dónde termina?.*

En realidad, las respuestas a estas preguntas quedan establecidas cuando decimos que la matemática está fundamentada en el **Método Axiomático.**

Para comprender en que consiste el ***Método Axiomático***, tomemos el esquema de la proposición de la sección anterior; la premisa i) nos daba información sobre el conjunto de números que podían sustituir a las letras a, b y c, en este caso los números reales. Si nos preguntamos *¿ qué es un número real?* y buscamos su definición, ella haría referencia a los números racionales y entonces otra pregunta surgiría *¿ qué es un número racional?,* de esta forma podríamos forzarnos a ir definiendo cada uno de los conceptos a los que hacemos referencia.

El ideal, ya anhelado por Platón, de una ciencia en la que todo se define y se demuestra, no es alcanzable; de ello podemos convencernos si pensamos en lo que significa ***definir*** y ***demostrar***.

> **DEFINIR un objeto, un ente de naturaleza cualquiera, quiere decir presentarlo en relaciones determinadas con otros que, a su vez, deberán ser definidos o comúnmente tenidos por conocidos.**

Si se tratase de objetos materiales, en determinado instante podríamos tomar uno y decir: *He aquí lo que intentamos decir con tal nombre*, pero los entes de los que se ocupa la matemática no son susceptibles de representación material concreta, por lo que no es posible proceder así.

> **DEMOSTRAR una proposición cualquiera, quiere decir, derivarla de otra, que a su vez será demostrada y por eso deducida de una precedente; y así sucesivamente.**

Pero este proceso no puede continuarse indefinidamente. *...¿Entonces?.*

Reflexionemos por ejemplo, sobre la estructura del diccionario de una lengua. Se trata de un libro en el que, como se afirma frecuentemente, están todas las palabras definidas. Pero, *¿están realmente todas? y ¿de qué manera?* Tomemos una palabra cualquiera y busquemos su significado; lo hallaremos expresado con otras palabras, de cada una de las cuales, estará ilustrado su significado. Pero no puede continuarse así indefinidamente, aunque pensemos en el diccionario como un libro de gran volumen, el número de palabras que contiene, por grande que sea, es siempre limitado; esto significa que en él se hallan ***reiteraciones***, que se cae en círculos viciosos.

Si el autor, en lugar de objetivos de *carácter literario y lingüístico*, se hubiese propuesto unos de *carácter lógico*, en el prólogo debería dirigirse al lector y decirle:

> *"El lector debe dar por conocido el significado de las siguientes veinte o treinta palabras (no sabemos cuantas podrían ser necesarias), con cuyo auxilio pasaré a definir todas las demás; pero aquellas que son indispensables constituyen el punto de partida.*

Análogamente, el matemático, por la necesidad de definir los entes por los que se interesa, forzosamente llegaría a un ***concepto que no se puede definir*** y los consideraría como conocidos, como ***conceptos primitivos***, y con su ayuda podrá después definir los demás. De la misma manera, el proceso llevado en una demostración, en su pasar de una a otra afirmación (mediante rigurosa deducción), deberá tener inicialmente y como base de su razonamiento, unas proposiciones de partida.

Así por ejemplo, después de haber definido los números reales a partir de los racionales, y éstos a partir de los enteros y los naturales, llegaríamos a través de otras definiciones implicadas en ese proceso ascendente, al concepto de conjunto que no podríamos definir. Porque *¿ qué diríamos ?*. No podemos utilizar la idea de *cantidad* porque esta trae consigo el concepto de número que no está definido todavía. Nos quedaríamos con la idea de *agrupación, colección, reunión,* que llevan implícito el mismo concepto y tomaríamos la idea de conjunto como concepto primitivo.

De igual manera, podríamos obligarnos a ir ascendiendo en la escalera deductiva respecto a las proposiciones, por ejemplo: al decir que la suma de los números reales satisface la propiedad conmutativa, podríamos exigir su demostración. Al hacerlo recurriríamos a la propiedad conmutativa de la suma de los racionales y mediante una nueva demostración, a la conmutativa del producto y de la suma de enteros y de esta forma se iría ascendiendo hasta llegar a ***proposiciones primigenias que no se pueden deducir de otras anteriores***.

Otro ejemplo: Al llegar en esta marcha ascendente a la teoría de conjuntos, nos veríamos obligados a ***aceptar (sin demostrar)*** proposiciones como estas:

> *Si el conjunto X es una parte del conjunto Y y el conjunto Y es una parte del conjunto X, entonces X es igual a Y.*
>
> *Si X es un conjunto, existe un conjunto formado por todas las partes de X.*

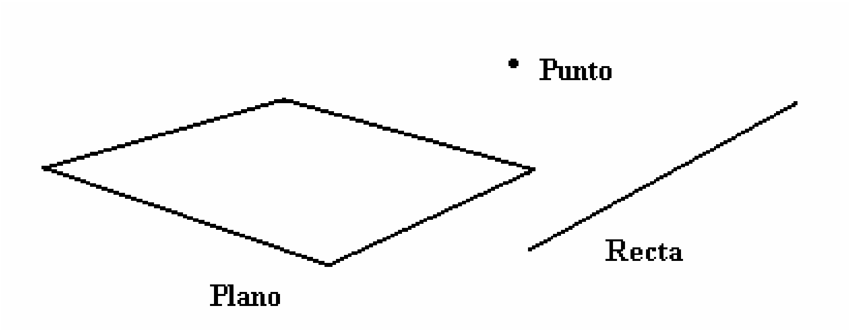
Estas proposiciones que, sin demostrar se aceptan como ciertas, se llaman **Axiomas** o **Postulados** y junto con los **conceptos primitivos** constituirán el punto de arranque y base de una **Teoría Matemática.**

Al conjunto formado por los conceptos primitivos y por los axiomas se llama **Sistema de Axiomas.**

Se dice que una teoría se desarrolla por el **Método Axiomático** cuando las definiciones que van apareciendo y las proposiciones **(*teoremas*)** que se van demostrando, se apoyan en los conceptos primitivos y en los axiomas, o bien, en definiciones y proposiciones que se derivan de aquellos.

Veamos un ejemplo de la geometría plana formado por cuatro axiomas:

Conceptos Primitivos: *Plano, Punto, Recta.*



Además usaremos términos y signos de la teoría de conjuntos. Así diremos:

Plano es un conjunto a cuyos elementos llamaremos *puntos*. A ciertos subconjuntos del plano les llamaremos *rectas*.

Designaremos a los puntos con letras mayúsculas: A, B, C, ... y a las rectas con letras minúsculas: a, b, c, ...

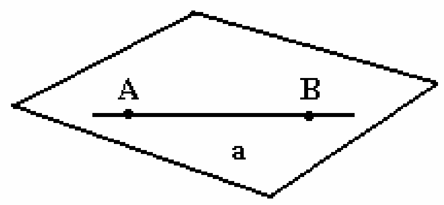
Daremos una definición previa:

Definición: Diremos que dos rectas a y b del plano son paralelas si son la misma recta o si su intersección es vacía (no tienen ningún punto en común). Denotaremos "a es paralela a b" escribiendo:

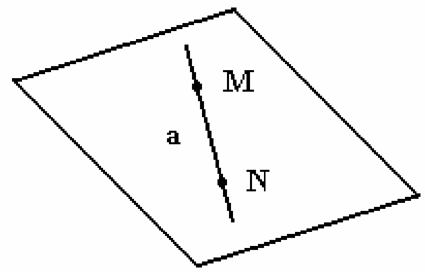
$$a \,||\, b \text{ si y sólo si: } a = b, \text{ o bien } a \cap b = \emptyset$$

Axiomas:

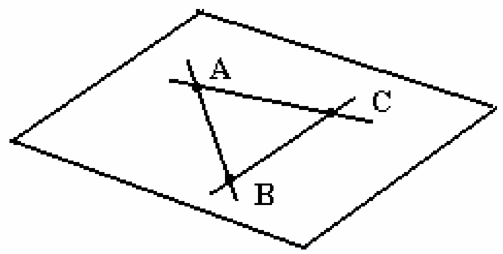
1.- Para todo par (A, B) de puntos distintos del plano, existe una recta y sólo una que los contiene.



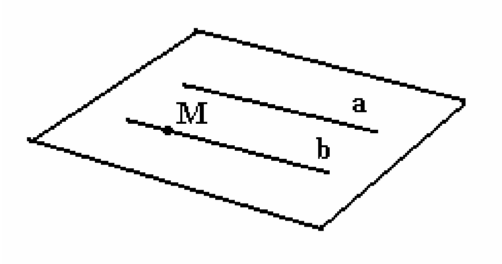
2.- Toda recta contiene al menos dos puntos distintos.



3.- El plano contiene al menos tres puntos distintos, que no pertenecen a la misma recta.



4.- Para toda recta a y para todo punto M que no esta en a, existe una recta paralela b, y sólo una que contiene al punto M.



A partir del sistema de axiomas dado y a través de definiciones y teoremas podremos desarrollar parte de lo que conocemos como ***geometría plana***, que como sabemos está inspirada, desde la antigüedad, por la observación del mundo físico que rodea al hombre. Esa serie de abstracciones de la forma de los cuerpos, de su tamaño, de sus relaciones, es la que llamamos geometría y constituye un ***modelo*** que se ajusta a los cuatro axiomas de nuestro sistema.

1 *PROBLEMAS Y EJERCICIOS*

Intuición, Inducción y Deducción. Definiciones, conceptos primitivos y axiomas.

1 Complete las siguientes oraciones utilizando las palabras que le den un sentido claro y preciso:

a) Se llama inducción al proceso de llegar ______________________________ a partir de experiencias específicas.

b) El razonamiento __________________ depende de la observación de casos particulares.

c) Se está practicando el pensamiento ____________________ cuando se tiene el presentimiento que algo es cierto.

d) La inducción y la ____________________ son elementos valiosos para descubrir proposiciones, más que para demostrarlas.

e) Cuando se obtiene una conclusión aplicando un principio a un caso particular, se está haciendo uso del razonamiento ____________________.

f) Es usual llamar deducción a una conclusión que se estableció por razonamiento ___________________________.

g) Si $3x + 6 = 8$, entonces $x =$ ______ es una conclusión correcta.

h) Si $a.b > 0$ y $b > 0$, entonces a______.

i) El científico en su laboratorio, a través de diferentes observaciones hace uso del razonamiento ____________________ para establecer ____________________ general.

j) El único instrumento que en el mundo del pensamiento opera válidamente es el proceso ____________________ lógica.

k) Definir un ente de cualquier naturaleza, quiere decir ________________________
____
____.

l) Demostrar una proposición cualquiera, quiere decir___________________________
____
____.

m) El método que utiliza la matemática es, eminentemente _________________.

n) Los conceptos que no se pueden definir a partir de otros se llaman ___________________________ y las proposiciones que se aceptan sin demostrar se conocen como _________________.

o) Un teorema es una proposición que se demuestra a partir de_________________
____.

p) El concepto de conjunto, es un concepto _______________________ mientras que el concepto de número racional es ________________________________.

q) En una demostración se hace uso del método ____________________.

r) La proposición: *“En todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos“* es ________________ mientras que la proposición: *“por dos puntos distintos pasa una recta”* es ____________________.

2 En cada uno de los casos dados a continuación, indique si el proceso empleado es: inductivo, intuitivo, deductivo o ninguno de los tres:

a) El primer día de clases, el profesor mira a los ojos de un alumno y le dice *“tú vas a aprobar este curso”*. ________________.

b) En un club deportivo, algunos de los integrantes del equipo de baloncesto tienen las siguientes estaturas: 1.78, 1.80, 1.79, 1.82, 1.85, y 1.80 m, un aspirante a ingresar al equipo concluyó: *“todos los miembros del equipo de baloncesto del club tienen por lo menos 1.78 metros de altura”*. _______________.

c) En un Zoológico un chimpancé ve un plátano que está fuera de su jaula y no puede alcanzarlo, toma un palo y con él atrae el plátano hasta tenerlo en sus manos. _______________.

d) Cuando Juanita cumplió 8 años, su madre le hizo una torta ese día. En ese mismo año, la madre de Juanita hizo tortas de cumpleaños para sus otras hijas: Rosa y Gloria. Juanita afirmó: *“Cada vez que alguna de nosotras cumple años mamá hace una torta”*. __________________.

e) *“Si el perímetro de un hexágono regular tiene 60 cm., entonces cada lado mide 10 cm”*. ________________.

f) Un caballo reconoce a cierta distancia el término de la jornada, se da cuenta que va a descansar y a comer y relincha de gozo. _______________.

3 En los ejercicios siguientes establezca la conclusión cuando le parezca razonable. Apóyese sólo en los datos proporcionados y diga que razonamiento empleó.

a) Se observa que una mosca prueba un líquido X y muere. Tiempo después, varias moscas prueban el líquido X y también mueren. Conclusión:___________
____
____________________________________. Razonamiento: ____________________.

b) A todos los gatos le gusta la leche. Conclusión: ____________________________
_______________________________________. Razonamiento: _____________________.

c) La suma de los dos primeros números naturales impares es 4, o sea 2^2. La suma de los tres primeros números naturales impares es 9, o sea 3^2. La suma de los cuatro primeros números naturales impares es 16, o sea 4^2. Conclusión:
____
_______________________________________. Razonamiento: ____________________.

d) Ayer fue Jueves. Conclusión:______________ .Razonamiento: ________________.

e) Un estudiante observó durante varios martes consecutivos, que la coral del Instituto se reunía para ensayar. Conclusión: _______________________________
____. Razonamiento: _______________.

3

El PENSAMIENTO Y El LENGUAJE EN LA MATEMATICA

> El hombre miraba sus meditaciones desde diversos ángulos, trataba de agarrarlas y luego enderezarlas con la fijeza y la rigidez de su mirada...
>
> Los edafólogos estiman que el suelo ideal para cultivos es el magro-arcilloso con un 10% de humus y sustancias calcáreas para estar en un grado cercano a la neutralidad química.

En el primer párrafo (fragmento de un poema de Francisco Pérez Perdomo, Premio Nacional de Literatura 1980), tenemos la expresión de ciertas ideas en el lenguaje de un artista y en el segundo la expresión de ciertas ideas en el lenguaje científico. Son estilos diferentes -¿verdad?-

El primero de ellos utiliza el sentido figurado, va en busca de la belleza, expresa el estado de ánimo de un ser humano, es susceptible de interpretaciones individuales, ..., etc.

El segundo establece un hecho, utilizando términos técnicos con una acepción precisa, producto de experimentaciones y estudios, y busca transmitir la información sin que haya lugar a varias interpretaciones personales.

La ciencia, y en particular la matemática, tiene una forma de expresar las ideas diferente al común de la gente y los artistas, porque le interesa que el conocimiento que ella crea se *transmita y desarrolle* para el beneficio del hombre.

Pero como en la transmisión de las ideas hay errores (voluntarios, como por ejemplo: la información distorsionada deliberadamente con fines interesados, ó involuntarios que se producen cuando una persona *intuye* que algo es cierto y lo usa en tal sentido), se adoptan algunas precauciones para tratar de evitarlos.

Se trata en primer término de ***precisar el lenguaje*** y en segundo lugar de ***sustituir la intuición*** por la ***deducción*** en la formalización del conocimiento. De esta forma surge en la matemática el "**razonamiento abstracto**" como una ***modelación*** e ***idealización*** de ciertos fenómenos que ocurren en el mundo natural.

En la transmisión de las ideas matemáticas se usa un ***lenguaje lógico*** cuyas herramientas principales son: los **principios** y las **reglas de inferencia** o **deducción** que aclararemos próximamente.

3.1 Proposiciones Simples

De la última discusión quedó claro que el primer requisito para construir una teoría en matemática, es conocer el significado de las palabras empleadas. El término ***proposición*** lo hemos empleado hasta ahora sin dar su definición.

Definimos el término proposición como todo enunciado que tiene un sólo valor de verdad, es decir, es un enunciado al cual debemos poder asignar un único valor que puede ser verdadero o falso, pero, no ambos.

Es muy conveniente distinguir que dichas proposiciones forman ***oraciones declarativas.***

***Ejemplo 2*:**

i) $1 + 4 = 5$ (V)

ii) $\sqrt{3}$ *es un número entero* (F)

iii) *Andrés Bello descubrió América* (F)

iv) *El año tiene 400 días* (F)

Las siguientes oraciones no son proposiciones porque no podemos asignarles un valor de verdad, esto es, verdadero o falso:

Ejemplo 3:

i) *Un triángulo es menor que un círculo*.

ii) *El color azul vale menos que una sonrisa*.

iii) *Esta afirmación es falsa*.

Tampoco son proposiciones aquellas expresiones dubitativas, exclamativas, imperativas, interrogativas, etc.

***Ejemplo 4*:**

i) *¿Quién anda ahí ?*

ii) *¡ Que chévere!*

iii) *Te ordeno salir*.

3.2 Proposiciones Compuestas y Operadores Lógicos

Así como los números naturales son en aritmética básicos para combinarlos mediante operadores elementales como más (+), menos (−), por (.) y entre (÷) y producir otros números mediante las reglas aritméticas respectivas de adición, sustracción, multiplicación y división; de manera similar lo hacemos en *lógica*, teniendo en cuenta que en esta área nuestra ***unidad básica*** es la *proposición* y nuestros operadores son los llamados ***conectivos lógicos***, que producen este caso las ***proposiciones compuestas***, las cuales pueden ser ***conjuntivas, disyuntivas, condicionales, negativas,*** etc.

Dichas proposiciones compuestas pueden formarse a partir de dos proposiciones simples, asociándolas con conectivos lógicos, que son expresiones del tipo ***"y", "o", "Si ..., entonces ...",*** etc. También se emplea ***"no***", aunque esta última no opera de manera estricta sobre dos proposiciones, sino que únicamente interviene en una sola.

En una proposición compuesta, es importante conocer el valor de verdad de sus componentes, pues su valor de verdad depende de los valores de verdad de cada una de ellas.

3.3 Proposición Conjuntiva

Si p y q representan dos proposiciones, la proposición compuesta (p y q), que se simboliza p Ù q, se llama Proposición Conjuntiva de p y q o Conjunción de p y q.

En el caso que nos ocupa: la proposición conjuntiva, aceptaremos que la verdad de su conjunción significa que las dos proposiciones que la componen sean verdaderas.

En igual forma, aceptaremos que la conjunción es falsa si lo es cualquiera de sus componentes.

***Ejemplo 5*:**

p : *Juan es estudiante.*

q : *Juan es jugador de fútbol.*

$p \wedge q$: *Juan es estudiante y Juan es jugador de fútbol.*

Para poder analizar cualquier proposición compuesta y establecer su valor de verdad, es usual hacerlo a través de lo que se conoce como ***Tabla de Verdad,*** donde se muestran todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones simples que la componen y el respectivo valor de verdad de la proposición compuesta.

Adoptaremos por convención de aquí en adelante, los siguientes valores de verdad:

1 (Verdadero)

0 (Falso)

La tabla de verdad para el *conectivo lógico conjunción* es la mostrada a continuación:

CONJUNCION

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Otros ejemplos de proposiciones conjuntivas con su respectivo valor de verdad son:

***Ejemplo 6*:**

i) *6 es un número par y 6 es un entero positivo.* (1)

ii) *Venezuela fue la sede de los Juegos Panamericanos de 1983 y Venezuela es un país Latinoamericano.* (1)

iii) *2 + 5 = 7 y 2.5 = 7* (0)

3.4 Proposición Disyuntiva

Si p y q representan dos proposiciones simples, la proposición (p o q), que se simboliza p Ú q , se llama Proposición Disyuntiva de p y q o Disyunción de p y q.

Nos encontramos que al tratar de determinar los valores propios de una disyunción en español, el significado de la *conjunción* "o" es ambiguo. En nuestro estudio, el sentido en que se emplea es *inclusivo,* es decir, basta con que una de las proposiciones componentes sea verdadera, para que el valor de verdad de la disyunción sea verdadero. La *"o" incluyente* muy a menudo se expresa en el lenguaje legal para evitar confusiones como "y/o".

***Ejemplo 7*:**

p: *Juan es estudiante*

q: *Margarita es Atleta*

$p \vee q$: *Juan es estudiante o Margarita es atleta*.

La tabla de verdad para el conectivo lógico disyunción se da a continuación:

DISYUNCION

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

otro ejemplo de proposición disyuntiva con su respectivo valor de verdad :

***Ejemplo 8*:**

i) *3 es un divisor de 8 o 3 es un número par*. (0)

ii) *Belmont es una marca de cigarrillo o Belmont es una marca de talco*. (1)

iii) *2 es un número par o 2 es un número primo*. (1)

3.5 Proposición Negativa.

Si p representa una proposición, la proposición compuesta (No p) se escribe ~p, y se llama Proposición Negativa o Negación de p. Como es de esperar, dada una proposición simple p, la proposición compuesta Negación de p toma el valor opuesto de la proposición simple u original, o sea: si p es verdadera, ~ p es falsa; y si p es falsa, ~ p es verdadera.

***Ejemplo 9*:**

p: *Luisa está en la clase de lenguaje*

~ p: *Luisa no está en la clase de lenguaje,* o también,

~ p : *Es falso que Luisa está en clase de lenguaje*.

Su tabla de verdad se muestra a continuación:

NEGACION

p	~ p
1	0
0	1

3.6 Proposición Condicional

Si p y q representan dos proposiciones, la proposición (si p entonces q) se llama Proposición Condicional y se simboliza por p ® q, siendo p llamada antecedente y q consecuente.

Como ya es sabido, el valor de verdad de la proposición condicional depende del valor de verdad de las proposiciones componentes, la tabla de verdad de ésta está de acuerdo con nuestra *intuición lógica*:

CONDICIONAL

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Para entender los valores de verdad que aparecen en la tabla de verdad del condicional, considérese el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10:

Miguel le dice a una amiga:

Si consigo dinero, entonces te llevo al cine

hay cuatro posibilidades:

1. Miguel consigue dinero y lleva al cine a su amiga. En este caso, mantiene su promesa; por lo tanto, la proposición es verdadera.

2. Miguel consigue dinero pero no lleva a su amiga al cine. En este caso, rompió su promesa; por lo tanto, la proposición es falsa.

3. Miguel no consigue dinero pero a pesar de ello lleva a su amiga al cine (no rompiendo su promesa); por tanto, la proposición es verdadera.

4. Miguel no consigue dinero y no lleva a su amiga al cine (no rompió su promesa), luego la proposición es verdadera.

En los dos últimos casos cabe observar que, al no cumplirse el antecedente, que viene a ser en realidad una condición, no tiene por qué exigirse el consecuente o conclusión, el cual está en libertad de tomar cualquier valor de verdad, siendo por lo tanto, el valor de verdad 1 para la proposición condicional.

Las proposiciones condicionales son muy importantes en matemática, y existen varias maneras de enunciar $p \rightarrow q$. Veamos las más usuales:

Si p, entonces q

p solo si q

q si p

p es suficientemente para q

q es necesariamente para p.

Probablemente, el lenguaje común hará que no se interprete como se desea una proposición condicional escrita en alguna de las formas presentadas, pero la lógica no permite tales ambigüedades. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 11: .

Sean

p: *Yo estudio*

q: *Yo apruebo el curso*.

luego,

$p \rightarrow q$: *Si yo estudio, entonces yo apruebo el curso.*

En este caso, se dice que es ***suficiente*** estudiar para aprobar el curso. Sin embargo, no se dice que esta es la única manera; en otras palabras, no se dice que sea ***necesario.***

Por otro lado, la proposición compuesta $p \rightarrow q$, asegura que los que estudien, ***necesariamente*** aprueban el curso o equivalentemente, *"es necesario que apruebe el curso para que haya estudiado".*

Empleando las formas convencionales en el lenguaje de la matemática lo anterior puede decirse en los siguientes términos :

El hecho de estudiar es condición suficiente para que yo apruebe.

El hecho de que yo apruebe es condición necesaria para que yo estudie

Veamos ahora ejemplos de proposiciones condicionales con su respectivo valor de verdad:

Ejemplo 12:

i) *Si Mérida está en Venezuela, entonces 2 + 5 = 8* (0)

ii) *Si Mérida está en Alemania, entonces 4+ 8 = 6* (1)

iii) *Si Mérida está en Venezuela, entonces París está en Francia* (1)

iv) *Si París está en Italia, entonces la luna está hecha de nieve.* (1)

v) *Si tres es un número par, entonces -1 = 1* (1)

Estudiemos ahora el significado de ***equivalencia lógica*** :

Consideremos los siguientes enunciados:

p: *Hoy es jueves*

q: *Hoy es el día anterior al viernes*

r : *Hoy es la víspera del viernes*

s: *Hoy es el día que sigue al miércoles*.

Podemos observar que las cuatro proposiciones describen la misma idea y que tienen el mismo valor de verdad. Dichas proposiciones que ***tienen el mismo valor de verdad, se llaman proposiciones equivalentes***, y se emplea el símbolo º para indicar la relación de equivalencia entre proposiciones.

Esto es, $p \equiv q$, $q \equiv r$, $r \equiv s$; o bien: $p \equiv q \equiv r \equiv s$.

Ejemplo 13:

La madre enojada con su hijo, le grita:

O haces bien la tarea o te quedas en casa.

Realmente lo que quiere decir es:

Si no haces la tarea, entonces te quedarás en casa.

Simbolicemos las dos expresiones equivalentes anteriores:

Si no haces la tarea, te quedarás en casa: $p \rightarrow q$

O haces la tarea o te quedaras en casa: $(\sim p) \vee q$

esto es: $p \rightarrow q \equiv (\sim p) \vee q$

Esta equivalencia lógica es muy importante, pues nos permite transformar un *condicional* en una *disyunción* y viceversa.

Una definición técnica sobre el concepto de proposiciones equivalentes es la siguiente :

Dos proposiciones p y q son equivalentes cuando sus respectivas tablas de verdad coinciden.

Con esta definición podemos, de manera práctica, comprobar que las proposiciones : $p \rightarrow q$ y $(\sim p) \vee q$ son equivalentes. Basta construir la tabla de cada una de ellas y compararlas o construir una sola tabla donde aparezcan ambas proposiciones como la siguiente :

p	q	~p	$p \to q$	$(\sim p) \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

3.7 Implicación

En matemática nos interesan las ***verdaderas implicaciones*** por ser la forma básica de la mayoría de los teoremas. Esta estructura de los teoremas se simboliza por **hipótesis Þ tesis** o **hipótesis Þ conclusión**.

En implicaciones correctas, lo fundamental es que cuando la ***hipótesis es verdadera***, la ***conclusión debe serlo***; por ello, nos referimos a la ***hipótesis*** como ***una condición suficiente*** para la ***conclusión*** y ésta ***como condición necesaria*** para la ***hipótesis.*** Esto quiere decir que, cuando la ***hipótesis se cumple,*** **es** ***información suficiente*** para saber que la ***conclusión se cumple***.

Es importante hacer notar que la implicación se forma únicamente cuando el condicional tenga un valor de verdad 1. Para que lo anterior suceda, debe quedar excluida la posibilidad lógica ***p verdadero - q falso*** del condicional.

Para hacer la distinción entre condicional e implicación, emplearemos el siguiente símbolo para indicar **"p implica q"**: **p Þ q** .

Ejemplo 14:

Considérese la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

de acuerdo con esta tabla podemos decir que p implica $p \vee q$, simbólicamente :

$$p \Rightarrow (p \vee q).$$

Veamos otros ejemplos:

Ejemplo 15: .

1. *Si hoy es lunes, entonces mañana será martes*

2. *Si un número es múltiplo de 25, entonces es múltiplo de 5.*

3. *Si* $\boxed{}$ *> 0, entonces* $\boxed{}$ *es un número real positivo*

4. *Si x < 2, entonces x < 6; x Î N*

5. *Si x = 4, entonces* $x^2 = 64$ *; x Î N*

Estos ejemplos muestran que una implicación es un tipo de condicional que, en el caso de estar formado por proposiciones simples para todos los casos posibles, tiene valor de verdad 1. En los ejemplos anteriores podemos decir:

Que sea hoy lunes, implica que mañana sea martes

$\boxed{}$ *> 0 implica que* $\boxed{}$ *es un número real positivo, etc.*

3.8 Proposición Bicondicional

Si p y q representan dos proposiciones, la proposición compuesta (p si y sólo si q) se llama Bicondicional de p y q, es usual abreviarlo "sii", y simbolizarlo por p « q.

Puede observarse el bicondicional formado por la conjunción de **p** ® **q** y **q** ® **p** .

Esta proposición es una de las más importantes, ella establece equivalencia entre proposiciones que la componen y se usa en cualquier definición matemática. Su tabla de verdad se muestra a continuación:

BICONDICIONAL

p	q	p↔q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Ejemplo 16:

i) *3^2 ¹ 9 , sí y sólo sí 4^2 ¹ 16* (1)

ii) *$3^2 = 9$, sí y sólo sí $2+3 = 6$* (0)

iii) *12 es divisible por 6, sí y sólo sí 6 es par* (1)

3.9 Variantes del Condicional

Es de suma importancia hacer notar que el condicional muestra una diferencia particular con respecto a la conjunción, la disyunción y el bicondicional: $p \wedge q$ es equivalente con $q \wedge p$, $p \vee q$ con $q \vee p$; también, $p \leftrightarrow q$ con $q \leftrightarrow p$, pero, $p \rightarrow q$ **no es equivalente** con $q \rightarrow p$.

Las falacias más frecuentes en un razonamiento son consecuencia de ***confundir una proposición condicional con su recíproca***.

Consideramos los casos más importantes de una proposición condicional:

1. Condicional.

2. Recíproca o conversa del condicional.

3. Inversa del condicional.

4. Contrarrecíproca del condicional.

Proposiciones		1	2	3	4
p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(\sim p) \to (\sim q)$	$(\sim q) \to (\sim p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

De la tabla anterior, nos damos cuenta que son lógicamente equivalentes:

- ♦ El condicional y su contrarrecíproco.
- ♦ El recíproco y el inverso condicional.

Ejemplo 17:

Establézcase la recíproca, la inversa y contrarrecíproca de las proposiciones dadas e indique su valor de verdad:

a) Si una figura plana es un cuadrado, entonces es un paralelogramo.

i) **Recíproca:** *Si una figura plana es un paralelogramo, entonces es un cuadrado.* (0)

ii) **Inversa:** *Si una figura plana no es cuadrado, entonces no es un paralelogramo.* (0)

iii) **Contrarrecíproca:** *Si una figura plana no es un paralelogramo, entonces no es un cuadrado.* (1)

b) Si un número entero es par, entonces es divisible por 2.

i) **Recíproca:** *Si un número entero es divisible por 2, entonces es par* (1)

ii) **Inversa:** *Si un número entero no es par, entonces no es divisible por 2.* (1)

iii) **Contrarrecíproca**: *Si un número entero no es divisible por 2, entonces no es un número par.* (1)

El primer ejemplo indica que ***el recíproco del condicional no siempre es verdadero***, ***aunque el condicional lo sea***.

El segundo ejemplo señala que si el condicional y su recíproco son verdaderos, no estamos hablando de un "condicional", sino en realidad de un "bicondicional", observe que lo que está presente es la definición de un número entero par, es decir:

"Un número entero es par sí y sólo sí es divisible por 2".

En base a lo anterior, es importante distinguir entre un condicional o un bicondicional para evitar falacias, ya que un condicional y su recíproco no son lógicamente equivalentes.

2 PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1 Proposiciones Simples y Proposiciones Compuestas

a) ¿Cuál es la unidad básica de la lógica matemática?_________________________

b) Diga en sus propias palabras qué entiende por proposición. __________________
____
____

c) Diga como pueden formarse proposiciones compuestas. ______________________
____
____

d) ¿Cuándo se forma la implicación ?____
____
____

e) Diga, con sus propias palabras, qué se entiende por proposición disyuntiva y proposición negativa ____
____
____
____

f) ¿Qué entiende por proposición condicional ? _________________________________
____
____
____

g) ¿Cuál es la diferencia existente entre condicional e implicación ? ______________
____
____

h) ¿Cómo se forma el bicondicional ?____
____

i) ¿Qué se entiende por proposición bicondicional?______________________________
____
____

j) Mencione las variantes del condicional y dé ejemplos de cada una de ellas.____
____
____
____

____
____
____

k) ¿En qué difiere el condicional de los conectivos lógicos Bicondicional, Disyunción y Conjunción ?____
____
____
____
____

2 En cada caso indique si la afirmación es o no una proposición, y en caso de serlo, establezca su valor de verdad:

a) *“1 + 2 = 3”.*

b) *“Todas las aves vuelan”.*

c) *“Levántate y camina”.*

d) *“Las manzanas tienen sabor agradable”.*

e) *“$\square$ es un número irracional”.*

f) *“25 es un número primo”.*

g) *“El trapecio es una figura plana con dos ángulos iguales”.*

h) *“El cuadro La Mona Lisa, de Leonardo Da Vinci, es más artístico que Las Meninas, de Velázquez”.*

i) *“Una ecuación cúbica tiene tres raíces reales”.*

3 Fórmese el condicional de las siguientes proposiciones, dando su valor de verdad:

a) p: María va a la escuela (1) q: María aprende (0)

b) p: Alicia es secretaria (0) q: Alicia estudia inglés (1)

c) p: Miguel tiene mucho dinero (1) q: Miguel es muy trabajador (1)

4 Exprésense las siguientes proposiciones como expresiones equivalentes que empleen los términos *"si ... entonces ..."* , *"solo sí"*, *"necesaria"*, *"suficiente"*.

a) *"Una condición necesaria para el paralelismo es que las rectas no se corten"*.

b) *"Para que una función sea diferenciable, es necesario que la función sea continua"*.

c) *"Si una figura cerrada con rectas es un triángulo, entonces tiene tres lados"*.

d) *"Un entero positivo será divisible por un entero diferente de si mismo y la unidad, a menos que sea primo"*.

5 Escríbanse simbólicamente, las proposiciones siguientes en forma condicional, donde p: *hay mal tiempo* y q: *el avión está retrasado*.

a) *"Mal tiempo es una condición suficiente para que el avión esté retrasado"*.

b) *"Mal tiempo es una condición necesaria para que el avión esté retrasado"*.

c) *"El avión está retrasado si hay mal tiempo"*.

6 *"Si una matriz cuadrada tiene inversa, entonces su determinante es distinto de cero"*. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones se deducen de la anterior ? (No necesita tener conocimiento de matrices).

a) *"Para que un determinante sea diferente de cero, es suficiente que su matriz sea inversa"*.

b) *"Para que su determinante sea cero, es necesario que la matriz no tenga inversa"*.

c) *"Para que una matriz cuadrada tenga inversa, es suficiente que su determinante sea cero"*.

d) *"Una matriz tiene determinante igual a cero sólo si no tiene inversa"*.

7 En Cálculo Diferencial se establece que, "*si una función es derivable, entonces ella es continua*". ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera? (no es necesario tener conocimientos de funciones).

a) *"Ser derivable es una condición suficiente para que una función sea continua"*.

b) *"Ser derivable es una condición necesaria para que una función sea continua"*.

c) *"Una función es continua si es derivable"*.

d) *"Una función es derivable sólo si ella es continua"*.

8 Dígase cuál de los siguientes condicionales es el recíproco de: "*Si una figura plana es un cuadrado, entonces es un rectángulo*". En caso de no ser el recíproco, diga que tipo de variante es.

a) *"Si una figura plana es un rectángulo, entonces es un cuadrado"*.

b) *"Si una figura plana no es un cuadrado, entonces no es un rectángulo"*.

c) *"Una figura plana no es un cuadrado si no es un rectángulo"*.

9 Dígase cual de los siguientes condicionales es el contrarrecíproco de: "*Si dos planos no son paralelos, entonces ellos se cortan*". En caso de no serlo, diga que tipo de variante es.

a) *"Si dos planos se cortan, entonces ellos son paralelos"*.

b) *"Si dos planos no se cortan, entonces ellos son paralelos"*.

c) *"Si dos planos son paralelos, entonces ellos no se cortan"*.

10 Dada la proposición p encuentre una proposición q tal que el bicondicional que las conecta se convierta en una doble implicación.

a) p: *"un triángulo es equilátero"*.

b) p: *"dos rectas son paralelas"*.

c) p: *"dos números compuestos son iguales"*.

d) p: *"a . b > 0"*

4 FUNCIONES PROPOSICIONALES Y CUANTIFICADORES

La matemática necesita instrumentos lógicos más sofisticados que los descritos en la sección anterior. La razón de introducir el concepto de ***cuantificador*** *reponde a la necesidad de resumir una gran cantidad de proposiciones en una sola. En realidad, los cuantificadores permiten fabricar una proposición con una* ***función proposicional****. Una función proposicional es casi una proposición: para que lo sea, sólo falta darle un valor a su variable o sus variables*

4.1 Proposiciones Abiertas

La afirmación: *"éste es un estado de Venezuela"*, ¿es verdadera o falsa?, en la forma en que está expresada es evidente que no podemos concluir nada. Es verdadera si el nombre *Barinas* sustituye al pronombre *éste*. El conjunto de los nombres que pueden reemplazar la palabra *éste*. Se llama ***Conjunto de Definición***, denominado también ***Conjunto Universo*** o ***Dominio de la***

Variable. Observe que si otras palabras diferentes de *Barinas;* por ejemplo: *Caracas*, la proposición es falsa.

Una proposición en la que aparecen variables se llama Proposición Abierta:

Ejemplo 18:

i) *El número natural x es mayor que 15*.

ii) *m y n contraen matrimonio el próximo sábado*.

iii) $x + 5 = 8$.

En i) al reemplazar x por 5 obtendremos una proposición falsa y al reemplazar x por 48 obtendremos una proposición verdadera.

En ii) le dejamos a Ud. que determine "valores" de μ y ν tales que la proposición es verdadera utilizando el conjunto de sus amigos.

En iii) no está especificado el universo, pero claramente debe ser un conjunto de números. Si el universo es ***R***, la proposición es verdadera para x = 3 y falsa para cualquier otro reemplazo.

Si escogemos del conjunto universo de una proposición abierta, el subconjunto de aquellos valores que hacen la proposición verdadera, recibe el nombre de Conjunto de Verdad o Conjunto Solución o Extensión de la Proposición Abierta.

Ejemplo 19:

i) $x^2 + 3 = 7$; $x \in U = \{-2,1,2\}$

ii) *x es un número par;* $x \in U = \{2,3,4,5,6\}$

iii) $x^2 + 1 > 0$, $x \in U = \boldsymbol{R}$

iv) $x^2 + y^2 < 0$; $(x, y) \in U = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$

En estos ejemplos tenemos:

i) El conjunto de valores correspondientes al universo $U = \{-2,1,2\}$ que hacen la proposición verdadera es $V = \{-2,2\}$.

ii) Aquí la extensión es el conjunto $V = \{2,4,6\}$.

iii) Tenemos un ejemplo donde la extensión es todo el conjunto universo U, es decir, el conjunto de todos los números reales.

iv) No existe un punto $(x, y) \in \boldsymbol{R} \text{x} \boldsymbol{R}$ que satisfaga $x^2 + y^2 < 0$, la extensión en este caso es el conjunto vacío $V = \varnothing$.

4.2 Gráfica de Proposiciones

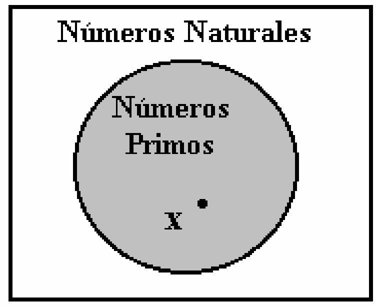
Con el objeto de comprender una proposición, a menudo se representa mediante una gráfica conocida con el nombre de ***Diagrama de Venn***. Esto, además nos ayuda a relacionar proposiciones y conjuntos.

Ejemplo 20:

"5 es un número primo", que desde el punto de vista de conjuntos, se puede interpretar como *"5 es un elemento del conjunto de los números primos"*.

Ejemplo 21:

“x es un número primo, x Î N”; que expresado en términos de conjuntos, resulta: *“x es un elemento del conjunto de los números primos: x Î N”*



En este caso, el conjunto de números primos es la extensión de la proposición abierta, por lo que se dibuja dentro del conjunto de los números naturales. Lo usual es representar el conjunto universo de la variable por el interior de un rectángulo, y el conjunto solución o extensión, por el interior de una curva simple cerrada (generalmente un círculo).

4.3 Funciones Proposicionales y Cuantificadores

Así como en el álgebra se simbolizan cantidades para facilitar el planteamiento y resolución de problemas, también en nuestro caso es importante simbolizar tanto las proposiciones simples como las abiertas.

Consideremos la siguiente proposición abierta:

x es un número racional; x Î R

La cual puede escribirse de la manera siguiente:

p(x): x es un número racional; x Î R.

Si a es un número real dado, la proposición simple se expresaría como:

p(a): a es un número racional

o simplemente

p: a es un número racional.

Observemos que en el primer caso x actúa como variable y recorre el conjunto universo, mientras que en el segundo estamos en un caso específico. Cuando x toma el valor a, la proposición deja de ser abierta para pasar a ser una proposición simple.

Podemos decir entonces, que p($^1/_2$) es verdadera y p($\boxed{\quad}$) es falsa.

Resumiendo la idea anterior tenemos que:

Una Función Proposicional de una variable, es un conjunto de símbolos que representan una proposición abierta de una variable. Esto es, p(x) representa el enunciado de la proposición abierta y x la variable.

La notación que emplearemos para cualquier proposición simple (específica) serán las letras p, q, r, etc., mientras que una función proposicional la representaremos por p(x), q(x), r(x), etc.
Ejemplo 22:

Veamos un ejemplo para encontrar la extensión de una función proposicional

Sea p(x) : $x^2 + 3x + 2 = 0$, donde $x \in R$

en tal caso, la extensión de la función proposicional p(x) será:

$P = \{x \mid p(x)\} = \{x \in R \mid x^2 + 3x + 2 = 0\} = \{-1, -2\}$

Puesto que en la mayoría de las situaciones matemáticas nos interesa considerar la posibilidad de que la extensión de una función proposicional sea la totalidad de miembros del conjunto universo, llamado también ***dominio de discusión***, y simbolizados por U o D respectivamente, en este caso empleamos el símbolo:

(" x Î U)(p(x)),

que se lee:

para todo x elemento de U, se cumple p(x),

Si el dominio de la variable está sobrentendido, se escribe simplemente:

(" x)(p(x)).

En igual forma, es interesante considerar la posibilidad de que la extensión de una función proposicional contenga al menos un elemento de U; esto quiere decir, que la extensión no es el conjunto vacío.

La idea anterior se simboliza como:

($ x Î U) p(x)

léase:

para algún x en U, se cumple p(x)

o existe al menos un x en U, tal que p(x)

A los símbolos " y $ se les llama cuantificadores, siendo el primero Universal y el segundo Existencial.

En general, los cuantificadores se omiten al leer matemática, pero pueden identificarse por el contexto:

Ejemplo 23:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \quad \textit{(identidad)}$$

En este ejemplo es claro que si tomamos como universo cualquier conjunto de números reales, entonces ***todo elemento del conjunto universo verifica la proposición abierta.*** En este caso el ***cuantificador*** omitido es del tipo ***universal.***

Ejemplo 24:

$$x + 2 = 0 \quad \textit{(ecuación)}$$

Aquí vemos que si tomamos como conjunto universal también los números reales, la extensión de la proposición, es el conjunto E = $\{-2\}$. El ***cuantificador*** omitido es del tipo ***existencial.***

Cuando a una función proposicional le precede un cuantificador, ésta se convierte en una proposición simple, por lo tanto, tiene un valor de verdad determinado. Por supuesto, este valor de verdad dependerá de cada función proposicional y de si se cumple o no lo especificado por el cuantificador.

Ejemplo 25:

(" x Î R) x + 2 = 6; R = íx ê x es un número realý (0)

(" x Î N) x > 0;N = Conjunto de números naturales (1)

($ x Î M) a(x), donde M = íx ê x es ser vivoý y a (x); x es gato. (1)

Es conveniente observar que la palabra cuantificador nos indica ***cuantos*** elementos de un conjunto dado satisfacen determinada cualidad.

4.4 Negación de Cuantificadores

La negación de una Función Proposicional con un cuantificador universal es equivalente a la negación de la misma función proposicional, precedida por el cuantificador existencial. De la misma manera, la negación de una función proposicional con un cuantificador existencial es equivalente a la negación de la misma función proposicional, precedida por el cuantificador universal.

Simbólicamente, se puede escribir:

~[**(" x Î D) p(x)**] º **($ x Î D) (~ p (x))**

la anterior proposición puede leerse como:

No es verdad que para todo x Î D, p (x) es verdadero

o también

existe un x Î D tal que p (x) es falso

Si tal elemento x existe, este es llamado ***contraejemplo*** dado que éste prueba la veracidad de la negación de una función proposicional cuantificada universalmente.

De igual manera

~[**($ x Î D) p(x)**] º **(" x Î D) (~ p (x))**

que se lee

No es verdad que para todo x Î D, p(x) es verdadero

o

para todo x Î D, p(x) es falso.

En el siguiente ejemplo se pueden ver las distintas formas de negación de funciones proposicionales que en general incluyen todos los elementos o miembros de un conjunto.
Ejemplo 26 :

Sea p(x)*: x es un estudiante del curso que aprueba matemática.*

Universo: *El conjunto de todos los estudiantes del curso*.

(∀x) p(x)*: Todos los estudiantes del curso aprueban matemática.*

Entonces la negación de esta proposición puede expresarse de distintas maneras:

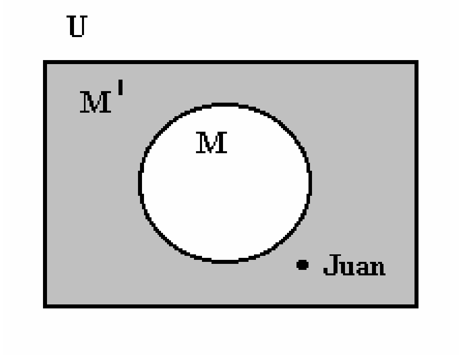
~[(∀x) p(x)]: *Es falso que todos los estudiantes del curso aprueban matemática*

:*Existe por lo menos un estudiante del curso que no aprueba matemática.*

: *Algunos estudiantes del curso no aprueban matemática*.

:*El conjunto de todos los estudiantes del curso no es subconjunto del conjunto de los estudiantes que aprueban matemática.*

El ejemplo anterior puede interpretarse a través de un Diagrama de Venn, si M denota el conjunto de todos .los estudiantes del curso que aprueban matemática (extensión de p(x)) y U el conjunto de todos los estudiantes del curso (conjunto universo), entonces el complemento del conjunto M respecto al universo U denotado por M´ representa el conjunto de todos los estudiantes del curso que no aprueban matemática (extensión de (~ p(x))



Si Juan es un estudiante del curso que no aprueba matemática, se encontrará como elemento M´ (región sombreada) y puede simbolizarse como un punto. El elemento Juan representa el

contraejemplo que demuestra que la proposición: ***todos los estudiantes del curso aprueban matemática,*** es falsa.

Observe que si E es la extensión de una función proposicional p(x), entonces:

$$E' = \{ x \mid \sim p(x) \}$$

es decir, el complemento de la extensión de la función proposicional dada.

3 PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1 Proposiciones Simples y Proposiciones Abiertas

a) Diga en sus propias palabras que entiende por proposición abierta.____________
____

b) Explique la diferencia entre proposición simple y proposición abierta __________
____
____

c) Escriba dos ejemplos de proposiciones simples y dos de proposiciones abiertas.
____
____
____

d) Defina conjunto universo y extensión de una proposición abierta ______________
____
____

e) Dé un ejemplo de proposición abierta y halle los conjuntos universal y extensión de esa proposición.____
____
____

2 Funciones Proposicionales y Cuantificadores

a) Defina el concepto de función proposicional e ilustre con tres ejemplos.________
____
____
____

b) Diga como se lee la siguiente expresión: $(\forall x \in D)(\ p(x))$.

c) Diga como se lee la siguiente expresión: $(\exists x \in D)(\ p(x))$.

3 Decidir si las siguientes afirmaciones son proposiciones abiertas o proposiciones simples. Si este último es el caso, indicar su valor de verdad:

a) y es un número impar: $y \in$ **N.**

b) 4 monedas de 5 centavos equivalen a un bolívar.

c) $4x + 3x^2 = 0$; $x \in$ **R.**

d) $x^2 + y^2 = 16$; $x, y \in$ **R.**

e) Una función cuadrática tiene como gráfica una línea recta.

f) $(x + 2)^2 = x^2 + 2x + 4$; $x \in$ **N.**

4 Elabore un diagrama de Venn para cada una de las proposiciones simples o abiertas y encuentre su valor de verdad o la extensión, según corresponda:

a) 3 es un número par.

b) x es impar; $x \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

c) Este año es bisiesto.

d) x no es un número primo; $x \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

e) 2 es raíz de la ecuación $x^4 - 4x^2 = 0$.

5 Encuentre los conjuntos de verdad (extensión) de las siguientes funciones proposicionales. Se considera como dominio de discusión (universo) U = **R**:

a) q(x): $x + 1 = 0$.

b) t(x): $x^2 - 7x + 12 = 0$.

c) s(x): $x^2 + 4 = 0$.

d) w(x): $x^2 + 2x + 1 = 0$.

e) v(x): $x^4 + x = 0$.

6 En los siguientes problemas, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones, siendo el dominio de la función proposicional el conjunto de los números reales:

a) $(\forall x)(\boxed{\qquad\qquad})$.

b) $(\exists x)(x^2 = x)$.

c) $(\forall x)(x + 5 = x)$.

d) $(\exists x)(x = 0)$.

e) $(\forall x)(x + 3 > x)$.

7 Si C = {1, 2, 3}, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) $(\forall x \in C)(x + 2 < 6)$.

b) $(\forall x \in C)(x + 6 < 8)$.

c) $(\exists\ x \in\ C\ )\ (x + 2 = 7)$.

d) $(\exists\ x \in\ C)\ (x + 5 < 7)$.

8 Indique qué cuantificador (universal o existencial) utilizaría en las siguientes funciones proposicionales. Se considera $x \in \boldsymbol{R}$:

a) m(x): $x + 8 = 0$.

b) n(x): $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$.

c) p(x): $x^2 + 1 = 0$.

d) o(x): $(x + 3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27$.

9 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Tome como conjunto universo el conjunto $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

a) $(\exists x \in D)\ (x^2 - 8 = 0)$.

b) $(\forall x \in D)\ (x^2 - 8 \neq 0)$.

c) $(\forall x \in D)\ (x^4 - 1) > 0)$.

d) $(\exists x \in D)\ (x^4 - 1) > 0)$.

e) $(\forall x \in D)\ (x^3 - 8 < 0)$.

f) $(\exists x \in D)\ (x^3 - 8 < 0)$.

g) $(\forall x \in D)\ (x^3 + 8 < 0)$.

h) $(\exists x \in D)\ (x - 6 \notin D)$.

i) $(\exists x \in D)\ (x^3 + 8 > 0)$.

j) $(\forall x \in D)\ (x - 6 \in D)$.

10 En los siguientes problemas, encuentre la negación de las proposiciones dadas:

a) $2 + 5 = 8$.

b) 11 es un número primo.

c) Existe un individuo deshonesto.

d) Algunos números son pares.

e) Todos los estudiantes son jóvenes.

f) $(\exists x \in \mathbf{R})\ (x^2 < 0)$.

g) $(\exists x \in \mathbf{R})\ (x^2 + 5x + 4 = 0)$.

h) $(\forall x \in \mathbf{R})\ (x^2 \geq 0)$.

i) $(\forall x \in \mathbf{R})\ (x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

j) Ningún número primo es múltiplo de 3.

k) $9.\,3 = 37$.

l) No es cierto que $7 > 8$.

m) $(\exists x \in \mathbf{R})\ (x + 3 \neq 10)$.

n) $(\exists x \in \mathbf{R})\ (x + 3 > 10)$.

o) $(\exists x \in \mathbf{R})\ (x + 3 < 10)$.

11 En los siguientes ejercicios simbolice mediante funciones proposicionales y cuantificadores los siguientes enunciados, describa además el conjunto universo:

a) Todos los bachilleres saben inglés.

b) Por lo menos un jugador de fútbol es un atleta distinguido en la pista.

c) Algunos estudiantes de inglés aman la música.
d) Ningún hombre es inmortal.

e) Es falso que algún español no es torero.

f) Es falso que algunos números no son compuestos.

g) Algún número es compuesto.

h) Ningún hombre es deshonesto.

12 En los problemas siguientes, determine la extensión de las siguientes funciones proposicionales. Tome como conjunto universo el conjunto de los números reales.

a) $(x^2 = 1) \rightarrow ((x = 1) \vee (x = -1))$.

b) $(x^2 = 1) \leftrightarrow ((x = 1) \vee (x = -1))$.

c) $(x \neq 1) \leftrightarrow (x^2 \neq 1)$.

d) $((x = 1) \vee (x = -1)) \rightarrow (x^2 = 1)$.

e) $(x > 0) \leftrightarrow (x = 0)$.

5 ARGUMENTOS VÁLIDOS

Los matemáticos son como los amantes ... Conceded a un matemático el mínimo principio, que el sacará de allí una consecuencia que tendréis que concederle también, y de esa consecuencia otra.

FONTENELLE

¿Que me estoy contradiciendo?
Muy bien: me estoy contradiciendo.
(Soy amplio, contengo multitudes)

WALT WHITMAN

La cuestión de si puede llegarle verdad real al pensamiento humano no es cuestión de teoría, sino una cuestión práctica. En la práctica es donde el hombre tiene que probar la verdad, esto es, la realidad y la fuerza, la terrenalidad de su pensamiento...Sólo se hacen hipótesis en vista de algún fin determinado.

CARLOS MARX

5.1 Tautología, Contradicción y Falacia

Los conceptos que daremos a continuación son la base para el desarrollo de las ideas que trataremos en esta sección:

Una proposición compuesta es una TAUTOLOGÍA si y sólo si su valor de verdad es verdadero, independientemente de que los valores de verdad de sus proposiciones componentes sean falsos o verdaderos. Una proposición compuesta es una CONTRADICCIÓN si y sólo si su valor de verdad es falso, independientemente que los valores de verdad sean falsos o verdaderos.

Diremos que una proposición compuesta es una FALACIA, si ella no es una tautología ni una contradicción.

Ejemplo 27:

Verificar que:

a) $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$, es una tautología.
b) $\sim (p \vee (\sim p))$, es una contradicción.
c) $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$, es una falacia.

En efecto, si fabricamos las tablas de verdad correspondientes a las proposiciones dadas, encontramos:

a) Una **columna de unos** al final de la tabla de verdad de la proposición compuesta $[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$. Esto indica que independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen, la proposición compuesta tiene valor de verdad verdadero. Por consiguiente ella es una tautología.

P	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)] \rightarrow (\sim p)$
1	1	0	0	1	0	**1**
1	0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	1	0	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**

b) Una **columna de ceros** al final de la tabla de verdad de la proposición compuesta $\sim (p \vee (\sim p))$. Lo que indica que independientemente de los valores de las proposiciones que la componen, la proposición compuesta tiene valor de verdad falso. Por consiguiente ella es una contradicción..

p	~p	$p \vee (\sim p)$	$\sim(p \vee (\sim p))$
1	0	1	**0**
0	1	1	**0**

c) Una **columna con ceros y unos** al final de la tabla de la proposición compuesta $[(p \to q) \wedge q] \to p$. Se tiene en este caso que el valor de verdad de la proposición depende de los valores de las proposiciones que la componen. Por consiguiente ella es una falacia.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$[(p \to q) \wedge q] \to p$
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	1	**0**
0	0	1	0	**1**

En un sistema deductivo, estamos interesados en obtener conclusiones válidas a partir de suposiciones iniciales verdaderas. La lógica estudia las reglas mediante las cuales obtenemos conclusiones válidas. El argumento por medio del cual obtenemos estas conclusiones válidas se llama ***prueba*** o ***demostración***. Además, en un sistema deductivo, obtenemos ***teoremas*** como consecuencia de ***postulados***, y hacemos estas deducciones construyendo un ***argumento de hipótesis a conclusión***. Nuestro razonamiento suele tomar generalmente la forma de una proposición condicional (que se expresa como ***hipótesis*** $\Rightarrow$ ***conclusión***). Requerimos que la proposición condicional sea verdadera, independientemente de los valores de verdad de la hipótesis o conclusión. Se aclara entonces que ***si el argumento es válido, el condicional debe ser una tautología.*** Por otra parte, ***si el condicional es una tautología, el argumento es válido***. Por tanto, para demostrar que un argumento tiene validez o no, basta que el condicional sea una tautología.

Antes de estudiar ciertos argumentos válidos, es conveniente distinguir la diferencia entre la validez de un argumento y el valor de verdad de la conclusión del argumento dado. Para ello, consideremos la siguiente situación:

Estamos en un estadio de fútbol, uno de los jugadores toma la pelota en la media cancha, corre por la banda derecha y manda un centro a media altura que cabecea el centro delantero y anota el gol que a la postre da el triunfo al equipo visitante.

Si analizamos esta jugada, nos daremos cuenta que para obtener ese gol, el equipo siguió un determinado proceso que se inició cuando el jugador tomó la pelota en la media cancha. El entrenador le había dicho a sus jugadores que si seguían la estrategia indicada, conseguirían goles (como efectivamente ocurrió). Su consejo o *argumento* tuvo un valor de verdad *verdadero*.

Pensemos ahora que antes del terminar el partido, el otro equipo marcó un gol en forma similar, pero con la diferencia que el centro delantero anotó el gol con la mano, en vez de hacerlo con la cabeza. Por supuesto, el árbitro invalidó el gol, ya que el proceso utilizado no era válido, aunque se obtuvo un valor de verdad *verdadero* al entrar el balón en la portería.

En nuestro estudio de lógica matemática, nos vemos implicados en situaciones muy similares. Al igual que en el fútbol hay muchos tipos de pases de balón que conducen al mismo fin, en la lógica existen múltiples formas de verificar un argumento para averiguar si la conclusión se desprende *válidamente* de las premisas.

Nos dedicaremos a mostrar este tipo de procedimientos o argumentos válidos, pero debemos diferenciar:

Valor de verdad verdadero es el que nos indica si nuestras conclusiones son correctas o no de acuerdo a los datos que nosotros proporcionamos en la hipótesis, y lo que califica si el proceso utilizado para ir de la hipótesis a la conclusión es correcto, es la validez.

Para garantizar que nuestras conclusiones son validas en la construcción de las demostraciones, emplearemos leyes lógicas, las cuales reciben el nombre de ***reglas de inferencia***. Trataremos aquí sólo aquellas que son utilizadas con más frecuencia en las demostraciones matemáticas.

Ejemplo 28:

A continuación veremos la regla de inferencia llamada ***regla de separación***:

Consideremos las siguientes proposiciones:

i) *Si está lloviendo, entonces el reloj es de excelente calidad*

ii) *Está lloviendo*

Nos damos cuenta que la proposición i) es una proposición condicional y, además, que no podemos esperar una conexión lógica entre el hecho de llover y la calidad de un reloj. Por otra parte, de i), no podemos inferir o deducir ninguna información relativa a la calidad del reloj; esto es, obtener conclusiones. Sin embargo, al aceptar las proposiciones i) y ii), si podemos establecer la siguiente conclusión:

iii) *el reloj es de excelente calidad*

Esto significa que si aceptamos las proposiciones i) y ii) como verdaderas, entonces debemos aceptar la proposición iii) como verdadera.

Para comprender más claramente la idea anterior, representemos la proposición ii) por p y la proposición iii) por q. De este modo, estamos afirmando que si $p \to q$ y p son verdaderas, entonces q se deduce de ambas y también es verdadera.

Observe que el argumento que estamos manejando lo podemos simbolizar de la siguiente manera :

$$[(p \to q) \wedge p] \to q$$

La tabla de verdad de este argumento aparece a continuación:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge q] \to p$
1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	0	**1**

Observe que el mismo es una tautología, por lo que podemos afirmar que el argumento utilizado es válido y por lo tanto la conclusión es correcta.

Ejemplo 29:

Simbolice el siguiente argumento y establezca si es o no válido:

si x = 120 entonces debe tenerse que x = 20.6. por otro lado, si x = 20. 6 entonces tendremos que x = 4.5.6, de aquí se concluye que si x = 120 entonces necesariamente x = 4.5.6

sean,

p: x = 102
q: x = 20.6
r: x = 4.5.6
$p \to q$: Si x = 120 entonces x = 20.6
$q \to r$: Si x = 20.6 entonces x = 4.5.6
$p \to r$: Si x = 120 entonces x = 4.5.6

entonces el esquema lógico del argumento es:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

Al construir la tabla de verdad del argumento encontramos que el mismo es una tautología, podemos asegurar entonces que el razonamiento anterior es válido.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

Ejemplo 30:

Establezca si el siguiente argumento es o no válido:

Premisas:

i) *Si estudio, entonces no fallaré en lógica*
ii) *Si no juego béisbol entonces estudiare*
iii) *Falle en lógica*

Conclusión:

Jugué béisbol

Primeramente simbolicemos el argumento como sigue:

sean,

p: *yo estudio*
q: *Fallé en lógica*
r: *Jugué béisbol*

con esto, el argumento se simboliza por:

$$[(p \to (\sim q)) \wedge ((\sim r) \to p) \wedge q] \to r$$

Queda por establecer la validez del argumento, para ello construimos su tabla de verdad:

p	q	r	~q	~r	p→(~q)	(~r)→p	(p →(~q)) ∧ ((~r) → p) ∧ q	[(p → (~q)) ∧ ((~r) →p) ∧ q] → r
1	1	1	0	0	0	1	0	**1**
1	1	0	0	1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	0	1	1	0	**1**
1	0	0	1	1	1	1	0	**1**
0	1	1	0	0	1	1	1	**1**
0	1	0	0	1	1	0	0	**1**
0	0	1	1	0	1	0	0	**1**
0	0	0	1	1	1	0	0	**1**

y encontramos que es una tautología. Por consiguiente el argumento es válido y la conclusión se desprende de las tres premisas dadas.

Ejemplo 31:

Querida amiga, si desea tener la piel suave use jabón Jazmín.

Este "slogan" publicitario pretende que la cliente piense:

Si uso Jazmín tendré la piel suave.

Transformemos el mensaje publicitario en un argumento lógico para averiguar si es o no válido.

Sea:

p: *tengo la piel suave*
q: *uso jabón Jazmín*

la fórmula del argumento es $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$.

En el ejemplo 27 se determinó que esta proposición compuesta no es una tautología. Este argumento no es válido, es una falacia. *¡ no se deje engañar por los publicistas!*

6 LA DEMOSTRACIÓN. MÉTODOS GENERALES DE DEMOSTRACIÓN

No puede haber sorpresas en lógica

LUDWIG WITTGENSTEIN

Queda pues entendido que para demostrar un teorema no es necesario, ni siquiera conveniente, saber lo que quiere decir. El geómetra podría sustituirse por el "piano lógico" imaginado por Stanley Jevons; o, si se prefiere, podría imaginarse una máquina en que las premisas se introdujeran por un lado y los teoremas salieran por el otro, como la legendaria máquina de Chicago en la que los cerdos entraban vivos por un lado y salían por el otro transformados en jamones y embutidos. El matemático no necesita saber qué hace más que esas máquinas.

HENRI POINCARÉ

6.1 Método de Demostración Directa

Puesto que ya conocemos la naturaleza de los teoremas, estamos en posibilidad de aprender a demostrarlos.

En general, se llama demostración al encadenamiento de proposiciones que nos permite obtener la conclusión o tesis a partir de ciertas proposiciones (condiciones) iniciales, supuestas verdaderas llamadas premisas. La

demostración es un proceso llamado deducción o razonamiento, que va desde las premisas hasta la conclusión, de tal forma que no se pueda encontrar ningún error a lo largo del proceso.

También podemos decir que la demostración es un argumento, que hace ver que una proposición condicional de la forma $p \rightarrow q$ es lógicamente verdadera, o sea, una implicación $p \Rightarrow q$. En otras palabras, una demostración en la que q es una consecuencia lógica de p, es una secuencia lógica de proposiciones que generalmente principia con p y termina con q. En esta secuencia cada proposición, después de la primera, *es uno de los postulados o axiomas, una definición, teorema previamente demostrado, un corolario (consecuencia inmediata de un teorema), una propiedad de la igualdad, etc.*, o se sigue de las proposiciones precedentes en la secuencia por alguna regla de inferencia.

Para la demostración de un teorema por el método de demostración directa, una cadena de proposiciones se forma para deducir la conclusión (tesis) a partir del conjunto de premisas (hipótesis + resultados de la teoría), de tal modo que la última es la conclusión, y cada una de ellas es una premisa o una consecuencia válida de una o varias que la preceden.

En el proceso de la demostración es conveniente tener presentes las siguientes recomendaciones:

i) *Se puede sustituir un término o una expresión por su definición.* Así, si nos dicen que la recta r del plano, es paralela a la recta r´, se puede sustituir esta afirmación por su definición: $r = r'$ o $r \cap r' = \varnothing$.

ii) *Se pueden utilizar los axiomas o los teoremas previamente demostrados, haciendo uso de los resultados de esos teoremas, siempre y cuando las hipótesis de esos teoremas aparezcan en el desarrollo del razonamiento*. Por ejemplo, si en una demostración aparece la suma (x + y) de dos enteros divisibles por un entero m, podemos hacer uso del resultado del teorema : *Si m divide tanto x como a y, entonces m divide a (x + y), para afirmar que la suma x + y es divisible por m.*

iii) *Se puede sustituir una proposición por otra equivalente.* Así, si un punto M equidista de los extremos A y B de un segmento, se puede situar M en la mediatríz m del segmento ya que: MA = MB si y sólo si, $M \in m$.

Veamos algunos ejemplos de demostraciones directas.

Ejemplo 32.

Demostrar la siguiente proposición:

Si los enteros a y b son divisibles por el entero m, entonces la suma a + b también es divisible por m

a partir de los siguientes definiciones, axiomas y teoremas:

$\mathbf{D_1}$ **:** *El entero x es divisible por el entero y ¹ 0, si y sólo si existe otro entero k tal que x = ky.*
$\mathbf{A_1}$ **:** *La suma de dos enteros x e y es también un número entero.*
$\mathbf{A_2}$ **:** *Si x, y, z son números enteros, entonces z(x+ y) = zx + zy.*
$\mathbf{T_1}$ **:** *Si x, y ,z, t son enteros tales que: x = z y t = y, entonces x + t = z + y.*

Antes de comenzar la demostración debe tenerse claramente diferenciadas la hipótesis y la tesis de la proposición:

Hipótesis (condiciones de partida): *a y b son números enteros divisibles cada uno por el entero m.*

Tesis (lo que se quiere demostrar): *(a + b) es también divisible por m.*

Presentaremos en formato de columna la secuencia lógica de pasos durante el desarrollo de la demostración. De este modo, podremos tener a la vista cada paso al lado de su respectiva justificación:

	Demostración (cadena de razonamientos)	Justificación
1	Sean a y b números enteros divisibles cada uno por el entero m, entonces existen enteros a´ y b´ que satisfacen a = ma´ y b = mb´.	Se hace uso de la definición D_1 donde se sustituye **a por x, k por a´** e **y por m** en el primer caso, y **b por x**, **k por b´** e **y por m** en el segundo.
2	Sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos: a + b = ma´ + mb´	Por el teorema T_1, donde se ha sustituido **x por a**, **z por ma´**, **t por b** e **y por mb´**.
3	o de manera equivalente a + b = m (a´+ b´)	Por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma establecida en el axioma A_2.
4	Como a´ + b´ es un entero, se tiene que m divide a la suma (a + b). ¦	Por axioma A_1 y por la definición D_1 se obtiene la conclusión.

Ejemplo 33:

Demostrar la siguiente proposición:

$$(\forall\ a, b \in \mathbf{R})\ (a = b \Rightarrow a^2 = b^2)$$

a partir de los axiomas y definición siguientes:

A_1: $(\forall\ x, y , z \in \mathbf{R})\ (x = y \Rightarrow xz = yz)$
A_2: $(\forall\ x, y \in \mathbf{R})\ (xy = yx)$
D_1: $(\forall\ x \in \mathbf{R})\ (x.x = x^2)$

Antes que todo, es conveniente indicar que tanto la proposición como los axiomas y definición se han presentado deliberadamente en lenguaje técnico con el uso de los cuantificadores. Afortunadamente en matemática no es usual presentar las proposiciones en lenguaje técnico, lo natural es presentarlas en el lenguaje ordinario del idioma, pero en este caso para no incurrir en errores, es conveniente ejercitar la traducción de las proposiciones del lenguaje técnico al lenguaje ordinario y viceversa. Observe que la traducción al lenguaje ordinario de la proposición a demostrar como la de los axiomas y la definición sería la siguiente:

Proposición: *Para cada par de números reales a y b, si a = b entonces* $a^2 = b^2$
A_1: *Sean x, y , z números reales; si x = y entonces xz =yz*
A_2: *Sean x, y números reales entonces xy = yx.*
D_1: *Para cada número real x se define* $x.x = x^2$

Procedamos ahora con la demostración de la proposición:

Hipótesis: a y b son números reales que satisfacen $a = b$
Tesis: $a^2 = b^2$

	Demostración (cadena de razonamientos)	Justificación
1	Sean a y b números reales que satisfacen $a = b$ **(I)**	Proposición de partida establecida en la hipótesis e identificada por **(I)**
2	multiplicando en ambos miembros por a tenemos $aa = ab$	Se aplica el axioma A_1 donde las variables **x, y , z** han sido sustituidas por **a, b, a** respectivamente.
3	O bien, $a^2 = ab$ **(II)**	Se hace uso de la definición D_1 donde se sustituye **x por a**, y se coloca $\mathbf{a^2}$ en vez de **aa**. Se identifica la proposición con **(II)**
4	Por otro lado, multiplicando en ambos miembros de (I) por b y operando obtenemos : $ba = bb$ $ab = bb$ $ab = b^2$ **(III)**	Partiendo de nuevo de **(I)**, se procede como en los pasos anteriores. La segunda igualdad se obtiene del axioma A_2 de conmutatividad de la multiplicación de números reales, aquí se sustituye **x, y por b, a** respectivamente. Con esto se logra poner **ab** en vez de **ba**.
5	De **(I)** y **(III)** se obtiene $a^2 = ab = b^2$ de donde se concluye que $a^2 = b^2$ ¦	Aquí se utiliza el principio de sustitución y se obtiene la conclusión.

6.2 Proposiciones de Existencia. Contraejemplo

En los ejemplos anteriores hemos realizado demostraciones de funciones proposicionales cuantificadas universalmente, esto es proposiciones del tipo :

$(\forall\, x \in U)(p(x))$
$(\forall\, x, y \in U)(p(x, y))$
$(\forall\, x, y, z \in U)(p(x, y, z))$, etc.

En esta sección nos ocuparemos de la demostración de las funciones proposicionales cuantificadas existencialmente, es decir del tipo :

$(\exists x \in U)(p(x))$
$(\exists x, y \in U)(p(x, y))$
$(\exists x, y, z \in U)(p(x, y, z))$, etc.

Las proposiciones existenciales son de gran importancia en la matemática. En muchas teorías suelen aparecer los llamados teoremas de existencia.

Como la veracidad de una proposición existencial queda establecida cuando la extensión de la función proposicional es un conjunto no vacío. La demostración de estas proposiciones bastará con exhibir o construir un elemento del conjunto universo que satisfaga la función proposicional :

Ejemplo 34:

Demostrar que entre dos números racionales existe otro número racional

Observe que la proposición a demostrar puede simbolizarse técnicamente como :

$$(\forall a, b \in \mathbf{Q})(\exists r \in \mathbf{Q})(a < r < b)$$

donde **Q** representa el conjunto de los números racionales esto es, el conjunto de todas las fracciones a/b donde a y b son números enteros con $b \neq 0$.

La demostración consistirá por lo tanto en suponer dadas dos números racionales a y b, y construir un número racional r que satisfaga a < r < b :

	Demostración	**Justificación**
1	Sean a y b números racionales tales que a < b.	Por la proposición de partida dada en la hipótesis. Tenga presente la siguiente definición : Se define la relación "<" en matemática de la manera siguiente : $x < y \Leftrightarrow y - x$ es un número positivo
2	sea $r = (a + b)/2$ entonces r es un número racional	Existe un axioma de los números racionales que establece que la suma de dos números racionales es un número racional y el cociente de dos números racionales es también un número racional.
3	Basta comprobar que este número satisface a < r < b. Para ello averiguamos los signo de	Por la definición de "x < y" y el teorema que establece que el cociente de dos

	(r - a) y (b - r) : $(r - a) = (b - a)/2$ como $a < b$ entonces $0 < b - a$ con lo cual $0 < (b - a)/2 = (r - a)$ deducimos que $a < r$ (I)	números positivos es positivo.

4	de la misma manera encontramos que $0 < (b - a) = (b - r)$ de donde se deduce que $r < b$ (II)	Repetimos los pasos anteriores para (b - r).
5	de (I) y (II) tenemos finalmente que : $a < r < b$ ¦	Lo establecido en (I) y (I I), esto es, $a < r$ y $r < b$ se escribe comúnmente como $a < r < b$. Con esto se tiene la conclusión.

Cuando queremos demostrar que una proposición universal *es falsa* bastará con demostrar que su *negación es verdadera*. Este argumento se basa en la siguiente tautología o regla de inferencia :

$$\sim [(\forall x \in U)(p(x))] \equiv (\exists x \in U)(\sim p(x))$$

Es decir, la demostración de que la proposición $(\forall x \in U)(p(x))$ es **falsa** consiste en demostrar la veracidad de la proposición existencial $(\exists x \in U)(\sim p(x))$. Esta demostración se basa en exhibir un elemento x_0 del universo U que establezca que $p(x_0)$ es falso. Con esto estamos indicando que la extensión de la función proposicional p no es todo el universo U. El elemento x_0 es llamado **contraejemplo**. Por ello se dice que basta un contraejemplo para refutar la proposición $(\forall x \in U)(p(x))$.

Ejemplo 34:

Demostrar que la proposición siguiente es falsa:

Para cada entero positivo n se cumple que $n^3 - 8 = 7n(n - 2)$

Observe que esta proposición en símbolos se escribe:

(" n Î N)(n^3 - 8 = 7n(n - 2))

A fin de encontrar un contraejemplo sustituimos el valor de n por los primeros enteros positivos :

Es cierta si n = 1, pues : $1^3 - 8 = 7.1(1 - 2) = -7$
Es cierta si n = 2, pues : $2^3 - 8 = 7.2(2 - 2) = 0$
No es cierta si n = 3, ya que $3^3 - 8 = 19 \neq 7.3(3 - 2) = 21$

Hemos encontrado un contraejemplo. Podemos ***refutar*** la proposición, ya que ella asegura que es válida para todo entero positivo y existe un entero positivo (n = 3) que no la satisface ¦

6.3 Método de Demostración Indirecta

En algunas ocasiones, es más conveniente demostrar una proposición condicional equivalente a la que se desea demostrar.

Para cierto caso, significa que vamos a partir de la negación de la conclusión c y por medio de argumentos válidos, llegaremos a la negación de la hipótesis h.

Lo anterior queda interpretado con la tautología familiar:

i) $(h \to c) \equiv [(\sim c) \to (\sim h)]$

Aquí podemos observar que si demostramos por el método directo el condicional $(\sim c) \to (\sim h)$, habremos demostrado el condicional original $(h \to c)$, dado que ambos son lógicamente equivalentes.

Esta es una variante del método de demostración indirecta, existen otras tautologías importantes de las cuales presentamos a continuación algunas de ellas :

ii) $(h \to c) \equiv [(h \wedge \sim c) \to (\sim h)]$

iii) $(h \to c) \equiv [(h \wedge (\sim c)) \to c]$

iv) $(h \to c) \equiv [(h \wedge (\sim c)) \to (r \wedge (\sim r))]$

En cualesquiera de estos tres casos podemos iniciar nuestra demostración partiendo de la hipótesis y la negación de la conclusión, o sea, $(h \wedge (\sim c))$, que en realidad constituye la negación de $(h \rightarrow c)$, la cual transformada válidamente, nos conduce a una contradicción (valor de verdad falso), que puede ser:

i) con la negación de la hipótesis,

ii) con la conclusión, o

iii) con algo diferente de la hipótesis y la conclusión.

Este último caso significa encontrar una contradicción con un hecho conocido o aceptado previamente.

Resumiendo:

En cualesquiera de los cuatro casos presentados, se lleva a cabo la deducción ***no*** *demostrando el condicional original, sino otro equivalente al mismo (o sea en forma indirecta).*

El caso i) es conocido como ***método contrarrecíproco*** y los casos ii), iii) y iv) como ***métodos por reducción al absurdo***.

Ejemplo 35 :

Demostrar que si el cuadrado de un número es par, el entero considerado es par.

Utilicemos el método contrarrecíproco. Para ello, escribamos la proposición contrarrecíproca:

Si un número no es par (es impar), entonces el cuadrado del número entero no es par (es impar).

Simbolizando la proposición dada y teniendo en cuente que el universo es el conjunto de los números enteros, se tiene:

h: a^2 es un número entero par.
c: a es un número entero par.
~h: a^2 es un número entero impar.
~c: a es un número entero impar.

Queremos entonces probar (~c → ~h), (que es la contrarrecíproca de h → c).

La proposición a demostrar es, en símbolos:

(" a Î N) (a impar ® a^2 impar)

	Demostración	Justificación
1	Sea a un número entero impar,	Hipótesis.
2	entonces existe un entero n tal que $a = 2n + 1$.	Definición de número entero impar.
3	Elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad se tiene : $a^2 = (2n + 1)^2$	Propiedad multiplicativa de la igualdad.
4	desarrollando el segundo miembro : $a^2 = 4n^2 + 4n + 1$	Operaciones efectuadas (el cuadrado del binomio).
5	Factorizando por 2 los dos primeros sumandos del segundo miembro : $a^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$.	Propiedades asociativas y distributivas (factor común).
6	sea $m = 2n^2 + 2n$; entonces $m \in \mathbf{Z}$	Propiedad de clausura para suma y producto de enteros.
7	por lo tanto $a^2 = 2m + 1$; $m \in \mathbf{Z}$ es un número entero impar ¦	Con la definición de número entero impar se obtiene la conclusión

Puesto que se ha demostrado la proposición contrarrecíproca, queda demostrada la validez de la proposición condicional original por ser ellas lógicamente equivalentes.

Ejemplo 36 :

Demostrar que el cero no tiene inverso multiplicativo.

Utilicemos la variante señalada por iv) . La demostración consistirá en suponer de partida que 0 tiene inverso multiplicativo.

	Demostración	Justificación
1	Supongamos que el 0 tiene un inverso multiplicativo. Llamémoslo a,	Se supone de partida lo contrario a lo que se quiere demostrar.
2	entonces a.0 = 1. (I)	El producto de un número y su recíproco es 1.
3	Por otro lado a.0 = 0 (II)	Propiedad multiplicativa del cero.
4	De (I) y (II) tenemos que 0 = 1, contrario a 0 ≠ 1.	Contradice un hecho conocido.
5	Por tanto el cero no tiene inverso multiplicativo.¦	Conclusión del método de demostración indirecta.

6.4 Método de Demostración por el Principio de Inducción

Para demostrar una proposición del tipo **$(\forall\ n \geq n_0)(\ p(n)\ )$** donde **n es un número natural**, se utiliza el **método de inducción.** Sabemos que para probar la veracidad la proposición $(\forall\ n \geq n_0)(\ p(n)\ )$, debemos demostrar que la extensión $E = \{\ n \geq n_0 : p(n)\}$ de la función proposicional p coincide con el conjunto $\{\ n : n \geq n_0\ \}$. La demostración se realiza en dos pasos :

i) **Se verifica en primer término que la proposición $p(n_0)$ es verdadera. Es decir p(n) se satisface para el primer elemento n_0.**

ii) **Se supone que para n = k, p(k) es verdadera (hipótesis inductiva) y en base a esto se demuestra la validez de la implicación $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.**

Observe que en el paso i) deja establecido que la extensión contiene al menos un elemento, en este caso n_0. Por ii) tenemos que si el elemento k está en la extensión entonces el elemento k + 1 también está en la extensión. Por lo tanto, como n_0 está en E entonces $n_0 + 1$ está en E, pero si $n_0 + 1$ está en E entonces $n_0 + 2$ está en E. De la misma manera si $n_0 + 2$ está en E, $n_0 + 3$ está también en E y así sucesivamente. En conclusión en E están todos los números enteros $n \geq n_0$. Esto demuestra que

$$E = \{\ n : n \geq n_0\ \}.$$

Por lo tanto la proposición p(n) se satisface para todo $n \geq n_0$. En otras palabras la proposición $(\forall\ n \geq n_0)(\ p(n)\ )$ es verdadera.

Ejemplo 37:

Demostrar que para cada entero $n \geq 1$ es válida la fórmula

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$$

Antes de comenzar la demostración téngase presente que

$$p(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$$

El primer miembro de la identidad a probar contiene n sumandos :

$$1, 2, 3, 4, ..., n-1, n$$

los primeros n números naturales y 1 + 2 + 3 + ...+ n es la manera de expresar la suma de estos n sumandos. Por lo tanto, si n = 1 tendremos un sólo sumando: el 1. Si n = 2 tendremos 2 sumandos: el 1 y 2. Si n = 3 los sumandos 1, 2 y 3 y así sucesivamente.

El segundo miembro de la identidad está conformado por la expresión algebraica: n(n +1)/2, que toma distintos valores cuando n toma los valores 1, 2, 3, 4, etc.

Esquematizaremos la demostración en una tabla como sigue :

	Demostración	**Justificación**
1	Sea $E = \{ n : 1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2 \}$	E es la extensión de la función proposicional p.
2	i) Es claro que $1 \in E$ pues, $1 = 1 (1 + 1)/2$	La fórmula se verifica para n = 1, esto es, p(1) es verdadera.
3	ii)Supongamos que para n = k la formula se satisface, esto es, $1 + 2 + 3 + ... + k = k(k + 1)/2$	Hipótesis inductiva.
4	Demostremos asumiendo la hipótesis inductiva, que para n = k + 1 $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$	Tesis inductiva. Observe que ésta es la identidad que vamos a probar.
5	En efecto, tomando el primer miembro de la hipótesis inductiva y desarrollando tenemos: $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) =$ $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) =$ $(1 + 2 + 3 + ... + k) + (k + 1) =$	Haciendo uso de la hipótesis inductiva, hemos sustituido a suma de los primeros k números naturales que aparecen entre paréntesis $(1 + 2 + 3 + ... + k),$ por la expresión equivalente

	$k(k + 1)/2 + (k + 1) =$	$k(k + 1)/2$
6	$(k^2 + 3k + 2)/2 = (k+1)(k + 2)/2$	Esta expresión se obtiene desarrollando y factorizando.
7	Por lo tanto, $1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) = (k + 1)(k + 2)/2$	Se concluye la tesis.. Se ha demostrado que $E = \mathbf{N}^*$

Ejemplo 38:

Demostrar que la fórmula $n^3 + 2n$ genera para cada entero $n \geq 1$ múltiplos de 3.

	Demostración	Justificación
1	Es claro que si $n = 1$, la fórmula nos da el número $1^3 + 2.1 = 3$, el cual es múltiplo de tres.	La fórmula se verifica para $n = 1$, esto es, $p(1)$ es verdadera.
2	Supongamos que para $n = k$, $k^3 + 2k$ es un múltiplo de tres.	Hipótesis inductiva.
3	Demostremos asumiendo la hipótesis inductiva, que para $n = k + 1$, $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ es un múltiplo de tres.	Tesis inductiva.
4	En efecto, $(k + 1)^3 + 2(k + 1) =$ $k^3 + 3k^2 + 5k + 3 =$ $(k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)$ Esta última expresión representa la suma de dos múltiplos de tres. El primero $(k^3 + 2k)$ es un múltiplo de tres por hipótesis inductiva y el segundo $3(k^2 + k + 1)$ es también un múltiplo de tres por tener a tres como factor. Dado que la suma de dos múltiplos de tres, es un múltiplo de tres, se concluye la tesis inductiva, lo que demuestra que la proposición es verdadera. ¦	Desarrollando y reagrupando términos convenientemente.

4 PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1 Tautologías, Contradicciones y Falacias

a) ¿Cuándo decimos que una proposición compuesta es una tautología?. Ilustre con un ejemplo.____
____
____

b) ¿Cuándo decimos que una proposición compuesta es una contradicción?. Ilustre con un ejemplo.____
____
____

c) ¿Cuándo decimos que una proposición compuesta es una falacia?. Ilustre con un ejemplo
____
____
____

d) ¿Qué son proposiciones lógicamente equivalentes?. Ilustre con un ejemplo.____
____
____
____

e) ¿Cuándo se dice que un argumento es válido?. Ilustre con un ejemplo. ________
____
____
____

2 Métodos de Demostración.

a) ¿Qué es una premisa?.____

____
____

b) ¿Qué es una conclusión?. ____
____
____

c) ¿Qué es una hipótesis?. ____
____
____

d) ¿Qué es una tesis?. ____
____
____

e) ¿Qué es una demostración?. ____
____
____

f) ¿Qué significa refutar una proposición?. ______________________________
____
____

g) ¿En qué consiste el método de demostración directa?. ___________________
____
____
____

h) ¿En qué consiste el método de demostración indirecta?. _________________
____
____
____

i) Indique algunas variantes del método de demostración indirecta y explique cada una de ellas. ____
____
____
____
____

j) En qué consiste la demostración por el método de inducción. _______________
____

3 Verifique que las siguientes proposiciones son tautologías:

a) $((\sim q) \wedge (p \leftrightarrow q)) \rightarrow (\sim p)$.

b) $((\sim p) \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$.

4 Empleando tablas de verdad, demuestre la equivalencia lógica en cada caso:

a) $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge (\sim q)$.

b) $p \rightarrow q \equiv p \wedge (\sim q) \rightarrow \sim p$.

c) $p \rightarrow q \equiv p \wedge (\sim q) \rightarrow q$.

d) $p \rightarrow q \equiv p \wedge (\sim q) \rightarrow r \wedge \sim r$.

e) $\sim(p \wedge q) \equiv ((\sim p) \vee (\sim q))$. (Ley de De Morgan para la negación de una conjunción)

f) $\sim(p \vee q) \equiv ((\sim p) \vee (\sim q))$. (Ley de De Morgan para negar una disyunción)

5 Simbolice en cada caso el argumento dado y establezca si la conclusión es o no válida.

a) Si llueve, entonces iré al cine. Llueve; luego, iré al cine.

b) Si llueve, entonces iré al cine. No llueve; luego, no iré al cine.

c) Si me caigo de la bicicleta, me lastimaré. Estoy lastimado; luego, me caí de la bicicleta.

d) Si voy de compras, adquiriré un disco. Si compro un disco, entonces adquiriré dos películas.

e) Si voy a Miami, viajaré en avión. No estoy viajando en avión, por tanto, no estoy yendo a Miami.

f) Si hoy es martes, mañana es miércoles. Mañana no es miércoles; luego, hoy no es martes.

6 Demostrar que las siguientes proposiciones son falsas con la ayuda de un contraejemplo:

a) Para todo número natural n, se verifica que $n^2 + n + 41$ es un número primo.

b) Para todo $x \in \mathbf{R}$ se verifica $(x^2 + 1)/x^2 < 150$.

c) Para todo número natural n, se verifica que $n^3 + 1$ es par.

d) Para todo número real x se verifica $x > 1/x$.

e) Cualquier par de números reales a y b verifica que $1/a > 1/b$.

f) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$.

g) Todos los números primos son impares.

h) Cualquier par de números reales positivos a y b satisfacen

i) Toda ecuación cuadrática tiene dos soluciones.

7 Demuestre los siguientes teoremas usando el método de demostración directa:

a) La suma de dos números enteros pares es un número entero par (sugerencia: use la definición de número par).

b) El producto de un número entero par por otro entero par es un entero par (sugerencia: use la definición de número entero par y número entero impar).

c) Existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $x^2 - 3x + 2 = 0$.

d) Si a, b y c son números enteros positivos, tales que a divide a b y b divide a c entonces a divide a c (sugerencia: x divide a y significa que existe un entero k tal que $y = k\,x$).

e) Si a y b son números reales tales que $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$ (sugerencia: establezca el signo de $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a)$ y use la definición de la relación “<”).

f) Existen números primos a y b tales que $a + b = 100$.

g) Existen ecuaciones polinómicas con tres soluciones distintas.

h) Si a, b y c son números reales tales que $0 < c$ y $a < b$ entonces $ac < bc$.

8 Demuestre los siguientes teoremas usando el método de demostración indirecta en su variante contrarrecíproca:

a) Para cada entero a se verifica que si a^2 es impar entonces a es impar (sugerencia: suponga que a es par y use la definición de número par).

b) Si r y r´son rectas cortadas por una secante s y los ángulos alterno-internos que forman estas dos rectas con s son iguales entonces r y r´ son paralelas(sugerencia: suponga que r y r´ no son paralelas entonces r , r´y s conforman un triángulo. Deduzca de aquí que los ángulos alterno-internos no son iguales).

c) Sean u y v números enteros tales que uv es impar entonces u y v son impares (sugerencia: por la equivalencia establecida en el ejercicio 4 e) la negación de la conjunción: **u y v son pares** es equivalente a la disyunción **u es impar o v es impar**. Esta disyunción significa que existen tres casos: u impar con v impar, u impar con v par y u par con v impar. Realice una demostración contemplando cada caso).

9 Demuestre las siguientes proposiciones utilizando el método de demostración por reducción al absurdo:

a) Para cada $x > 0$ se tiene que .

b) Sean x, y números reales tales que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, entonces $x.y \neq 0$.

c) es un número irracional.

10 Para demostrar que una proposición del tipo $p \Leftrightarrow q$, primero se demuestra $p \Rightarrow q$ y después $q \Rightarrow p$. Utilice esto para demostrar las siguientes proposiciones:

a) u y v son raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ si y sólo si, $u + v = -a$ y $uv = b$

b) Sean a, b y c números reales, entonces $a < b$ si y sólo si $a + c < b + c$

11 Para demostrar una proposición del tipo $p \Rightarrow (q \vee r)$ se demuestra la proposición $p \wedge (\sim q) \Rightarrow r$.

a)Establezca la equivalencia de estas proposiciones.
b) Utilice el argumento mencionado para demostrar la siguiente proposición: Si a y b son números reales y $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$ (sugerencia: tome como p: $ab = 0$, q: $a = 0$ y r: $b = 0$. Realice la demostración suponiendo que a es diferente de cero y divida por a cada miembro de la igualdad $ab = 0$, se concluirá $b = 0$).

12 Para demostrar una proposición del tipo $(p \vee r) \Rightarrow q$, se demuestra primero $p \Rightarrow q$ y luego $r \Rightarrow q$. Este **método de demostración por casos.**

a) Establezca la equivalencia entre estas proposiciones.

b) Demuestre que si x es un número real, entonces (sugerencia: utilice

la siguiente definición:

13 Para demostrar una proposición del tipo $(p \wedge q) \Rightarrow r$, se demuestra la proposición equivalente $(p \wedge (\sim r)) \Rightarrow (\sim q)$.

a) Establezca la equivalencia lógica entre estas proposiciones.

b) Demuestre que si u es un número racional y v es un número irracional, entonces $u + v$ es un número irracional (sugerencia : suponga que $u + v$ es un número racional y calcule la diferencia $(u + v) - v$ y establezca que este número es racional argumentando que la diferencia de números racionales es un número racional).

14 **Sistema Axiomático de la Selva**

Considere:

Los términos primitivos: león, manada.
La definición: un cubil es un conjunto formado por una manada y por un león que no pertenece a la manada.
Los axiomas:
A_1: existen por lo menos dos leones.
A_2: si l_1 y l_2 son leones diferentes, existe una única manada que los contiene.
A_3 : dada cualquier manada, hay por lo menos un león fuera de ella.

a) En este sistema axiomático demuestre los siguientes teoremas:

T_1 : hay por lo menos tres leones diferentes.
T_2 : hay por lo menos tres manadas diferentes.
T_3 : dos manadas diferentes tienen a lo sumo un león en común.
T_4 : existen por lo menos tres cubiles diferentes.

b) Discutir si, en este sistema axiomático, cada una de las siguientes afirmaciones es o no un teorema:
   i) el león que no pertenece a la manada es el jefe del cubil.
   ii) el rey de la selva es único.
   iii) un cubil tiene exactamente tres elementos.
   iv) todos los cubiles no tienen elementos en común.

15 La siguiente argumentación contiene una falacia. Explique donde se encuentra el error y cuál es.

	Demostración	Justificación
1	$x = y$	Suposición inicial.
2	$x^2 = xy$	Multiplicando ambos miembros por x.
3	$x^2 - y^2 = xy - y^2$	Restando y^2 en ambos miembros.
4	$(x+y)(x-y) = y(x-y)$	Factorizando.
5	$x + y = y$	Dividiendo cada miembro por $x - y$
6	$2y = y$	Ya que $x = y$ (suposición inicial).
7	$2 = 1$	Dividiendo entre y.

Conclusión: ¡ 2 = 1!

16 Usando el principio de inducción, demostrar cada una de las siguientes propiedades para los valores naturales de n que se indican en cada ejercicio:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $n \geq 1$.

b) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$; $n \geq 1$.

c) $1.2 + 2.3 + ... + n(n-1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; $n \geq 1$.

d) $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3; $n \geq 1$.

e) $n(n^2 - 1)$ es múltiplo de 24; n impar mayor que 1.

f) $10^n + 3.4^{n+2} + 5$ es divisible por 9; $n \geq 1$.

g) $n^2 < 3n - 2$; $n \geq 2$.

h) $(4^n - 1)/3$ es un entero, $n \geq 1$.

i) $(5^n - 1)/4$ es un entero, $n \geq 1$.

17 Demostrar aplicando el principio de inducción que:

a) La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)\pi$.

b) El número de diagonales de un polígono convexo de n lados es $n(n-3)/2$.

7 ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Cantor pertenece a la élite de los que hacen virar noventa grados el rumbo de la ciencia con el impacto de una sola idea. Newton lo hizo con la gravedad. Einstein con la relatividad; Cantor lo hizo con la de conjunto.

JOAQUÍN NAVARRO

Nadie podrá arrojarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros

DAVID HILBERT

7.1 Concepto de Conjunto. Relación de Pertenencia

A lo largo de este material hemos mencionado algunos elementos de la teoría de conjuntos. Haremos aquí de un breve repaso de la teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos es la rama de la matemática a la que el alemán Georg Cantor dio su primer tratamiento formal en el siglo IX. El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemática. Es una idea primitiva y, por tanto, no se puede definir.

Un conjunto es una agrupación, clase o colección de objetos denominados elementos del conjunto.

Ejemplo 39 :

Son conjuntos :

a) El grupo de los alumnos inscritos en este curso.

b) Los números naturales.

c) Los puntos de un círculo.

d) El grupo las personas que integran un conjunto deportivo.

e) Los animales que actúan en un circo.

f) Las raíces de la ecuación $x^2 - 1 = 0$.

Los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas: A, B, C, ... ; y los elementos del conjunto con letras minúsculas: a, b, c, ...

Con la notación

A = {m, n, o, ..., s}

indicaremos que el conjunto A está integrado por los elementos m, n, o, ..., s.

Si el elemento a pertenece al conjunto A, escribiremos:

a Î A

y leeremos "a es un elemento de A" ó "a pertenece a A". Si b no pertenece a A, se escribirá

b Ï A.

Por ejemplo: si el conjunto A está constituido por los números 1, 3, 4, 7 ; escribiremos:

$A = \{1, 3, 4, 7\}; \quad 3 \in A; \quad 8 \notin A.$

Existen dos maneras de ***definir*** o ***determinar*** un conjunto: por ***extensión*** y por ***comprensión***.

Diremos que un conjunto está determinado por extensión, cuando se ha enunciado cada uno de los elementos del conjunto.

Ejemplo 40 :

a) El conjunto D de los dígitos podemos representarlo por extensión usando la notación $D = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$.

b) El conjunto de los múltiplos de tres entre 1 y 10 podemos representarlo como $A = \{ 3, 6, 9 \}$.

Diremos que un conjunto está definido por comprensión cuando se enuncia una propiedad o atributo que es común exclusivamente a los elementos del conjunto. Es decir, mediante una función proposicional que los describa.

En este caso es indispensable nombrar un conjunto donde se extraen los elementos que forman el nuevo conjunto. Como ya sabemos es el conjunto universo U de definición de la función proposicional. De este modo un conjunto representado por extensión lo denotaremos por :

$$\mathbf{A = \{ x \in U: p(x)\}}$$

Ejemplo 41 :

a) Si U es el conjunto de las letras del abecedario, el conjunto de las vocales lo representamos por extensión como $V = \{ x \in U : x$ es una vocal $\}$.

b) Si U es el conjunto de los números reales, el conjunto de $A = \{ -1, 0, 1 \}$ podemos expresarlo por extensión como $A = \{ x \in U : x^3 - x = 0 \}$.

c) Si U es el conjunto de los números enteros, el conjunto de los múltiplos de 5 lo representamos por $A = \{ x \in U :$ existe k entero tal que $x = 5k\}$.

Para representar algunos conjuntos universales (conjuntos numéricos de trabajo) se usan algunas letras determinadas :

$\mathbf{N^*}$ **:**	Los números naturales $\{ 1, 2, 3, 4, ...\}$
N :	Los números naturales con el cero $\{ 0, 1, 2, 3, ...\}$
Z :	Los números enteros $\{ 0 , \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \}$
Q :	Los números racionales $\{ p/q : p, q \in \mathbf{Z} ; q \neq 0 \}$
R :	Los números reales
$\mathbf{R^+}$ **:**	Los números reales positivos
$\mathbf{R^-}$ **:**	Los números reales negativos
C :	Los números complejos

Conviene tener presente al conjunto que no tiene elementos, **el conjunto vacío** que lo representaremos por la letra griega $\emptyset$.

Ejemplo 42 :

a) El conjunto A = { $x \in$ **R** : $x^2 + 1$} es vacío, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

b) El conjunto A = { $x \in$ **N** : $x + 1 = 0$ } es vacío, ya que la raíz de la ecuación es el número negativo - 1.

Con el objeto visualizar las ideas relativas a conjuntos y las distintas relaciones que pueden surgir entre ellos, es aconsejable usar como estrategia de representación los conocidos diagramas de Venn. En estos diagramas es habitual representar al conjunto universal U por un rectángulo y los demás conjuntos por círculos o elipses y por zona sombreadas las relaciones que aluden a nuevos conjuntos.

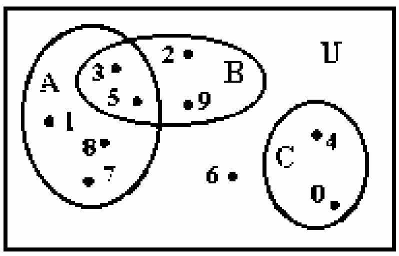
Ejemplo 43 :

En la siguiente figura esta representado el conjunto universal

U = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }

y los conjuntos

A = { 1, 3, 5,7}, B = { 2, 3, 5, 8, 9} y C = { 0, 4}



7.2 Subconjuntos. Conjuntos Iguales

Diremos que el conjunto A está incluido o contenido en el conjunto B, si todo elemento de A pertenece a B.

Diremos también que **A es subconjunto de B** y escribiremos :

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \quad \text{o} \quad \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$$

En símbolos: $\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)}$

Si **A no es subconjunto de B** escribiremos :

$$\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B}$$

En términos gráficos :

Ejemplo 44 :

a) Si A = { a, e, i, o , u} y B = { a, b, c, e, i, o, u, p}; el conjunto A está incluido o contenido en el conjunto B, dado que todo elemento de A es también elemento de B. Sin embargo B no es subconjunto de A dado b es elemento de B pero no es elemento de A.

b) El conjunto A de todos los enteros múltiplos de 4 es subconjunto del conjunto B de todos los números pares.

El conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de todos los conjuntos

En efecto, si A es un subconjunto cualquiera de U y tenemos presente que siempre $x \notin \emptyset$; la implicación

$$\mathbf{x \in \emptyset \Rightarrow x \in A},$$

será siempre verdadera. Luego por definición $\emptyset \subset \mathbf{A}$.

Diremos que dos conjuntos A y B son iguales, si todo elemento de A es elemento de B y recíprocamente, todo elemento de B es elemento de A.

En símbolos: $\mathbf{A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$

Ejemplo 45:

a) Sean A = {x : x entero positivo menor que 8} y B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }, en este caso tenemos que $A \subset B$ (1) ya que todo entero positivo menor que 8 está en B. Por otro lado, todos los elementos de B satisfacen la condición que define a A, por lo tanto $B \subset A$ (2). De (1) y (2) se concluye que A = B.

b) Si A = {x : x es la raíz de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$} y B = {2, 3} tenemos que A = B dado que, tanto 2 como 3 satisfacen la ecuación, es decir $B \subset A$. Por otro lado, como la ecuación es cuadrática a lo más puede tener dos raíces reales que necesariamente son 2 y 3, esto establece que $A \subset B$.

La relación de inclusión y la relación de igualdad entre conjuntos satisfacen las siguientes propiedades :

a) $A = A$	(Reflexiva)
b) $A = B \Rightarrow B = A$	(Simétrica)
c) $A = B$ y $B = C \Rightarrow A = B$	(Transitiva)
d) $A \subset A$	(Reflexiva)
e) $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$	(Antisimétrica)
f) $A \subset B$ y $B \subset C \Rightarrow A \subset C$	(Transitiva)
g) Si A es un conjunto de U entonces $\varnothing \subset A \subset U$	

7.3 Operaciones con Conjuntos

Si A y B son dos subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U, llamaremos intersección de A y B al conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B.

La intersección de A y B la representaremos con la notación

A Ç B,

que se leerá "A intersección B".

En símbolos : **A Ç B = { x Î U : x Î A Ù x Î B}**

En términos gráficos :

La parte sombreada representa
los elementos comunes a A y a B,
esto es, $A \cap B$

Dos conjuntos A y B se llaman disjuntos cuando su intersección es vacía

Ejemplo 46 :

Si U= { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 14, 16, 26},

A = {2, 4, 6}, B = {4, 6, 8, 10} y

C = {10, 14, 16, 26} entonces,

$A \cap B = \{4, 6\}$, $B \cap C = \{ 10 \}$

y $A \cap C = \varnothing$ (disjuntos)

Si A y B son dos subconjuntos cualesquiera de un conjunto universal U, se llama unión de A y B al conjunto de elementos de U que pertenecen a A, a B ó a ambos.

Lo representaremos con la notación

A È **B,**

y leeremos "A unión B".

En símbolos : **A** È **B = { x** Î **U : x** Î **A** Ú **x** Î **B}**

En términos gráficos :

La parte sombreada representa el conjunto $A \cup B$, conformado por los elementos de A, de B y los comunes a ambos.

Ejemplo 47:

Si A, B y C son los conjuntos del ejemplo anterior, entonces

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad \text{y} \quad A \cup C = \{2, 4, 6, 10, 14, 16, 26\}.$$

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, llamaremos diferencia de dichos conjuntos, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A pero no pertenecen a B.

Lo representaremos con la notación

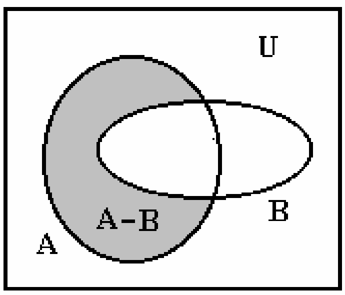
A - B

y leeremos "A menos B".

En símbolos : **A - B = { x Î U : x Î A Ù x Ï B}**

En términos gráficos :

La zona sombreada representa El conjunto A - B conformado por los elementos de A que no están en B.



Ejemplo 48:

Si A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y B = {2, 4, 8, 9} entonces, A - B = {1, 3, 5, 6}

Si A es un subconjunto de un conjunto universal U, llamaremos complemento de A al conjunto de los elementos de U que no pertenecen a A.

Lo representaremos con la notación

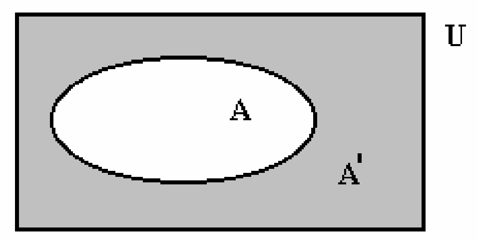
$$\mathbf{A'}$$

y lo leeremos "complemento de A con respecto a U".

En símbolos : **A´= {x Î U : x Ï A}**

En términos gráficos :

La zona sombreada representa los elementos de U que no pertenecen al conjunto A



Ejemplo 49 :

a) Si A = {4, 7, 8, 9} y U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, entonces A´= {0, 1, 2, 3, 5, 6}

b) Si U es el conjunto de los números enteros y A el conjunto de los números pares, entonces A es el conjunto de los números impares.

c) Si U es el conjunto de los números reales y A el conjunto de los números racionales, entonces A´ es el conjunto de los números irracionales.

Las operaciones entre conjuntos que hemos definido satisfacen las siguientes propiedades :

Propiedades de la intersección :

a) $A \cap B = A \cap B$	(Conmutativa)
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	(Asociativa)
c) $X \subset A$ y $X \subset B \Leftrightarrow X \subset A \cap B$	
d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$	(Conformidad)
e) $\varnothing \cap A = \varnothing$	

f) $A \cap A = A$ (Idempotencia)
g) $A \cap U = A$

Propiedades de la unión:

a) $A \cup B = B \cup A$ (Conmutativa)
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociativa)
c) $X \subset A$ y $X \subset B \Leftrightarrow A \cup B \subset X$
d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ (Conformidad)
e) $\varnothing \cup A = A$
f) $A \cup A = A$ (Idempotencia)
g) $A \cup U = U$
h) $A \cup B = U \Leftrightarrow A = B = U$

Propiedades de la intersección y la unión :

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributiva de la intersección respecto a la unión)

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributiva de la unión respecto a la intersección)
c) $A \cap (A \cup B) = A$ (Absorción)
d) $A \cup (A \cap B) = A$ (Absorción)

Propiedades de la complementación :

a) $A \cap A' = \varnothing$ $A \cup A' = U$
b) $\varnothing' = U$ $U' = \varnothing$
c) $(A')' = A$ (Involución)
d) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$
e) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (Leyes de De Morgan)

Propiedades de la diferencia :

a) $A - B = A \cap B'$
b) $A - A = \varnothing$

c) $A - \emptyset = A$
d) $\emptyset - A = \emptyset$
e) $U - A = A'$
f) $A - U = \emptyset$
g) $(A - B)' = A' \cup B$
h) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - B)$ (Ley de De Morgan)
i) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (Ley de De Morgan)
j) $A - B = B' - A'$
k) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
l) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
m) $A - (A - B) = A \cap B$
n) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$
o) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (Distributiva de la intersección respecto a la diferencia)
p) $A \subset B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

En el próximo ejemplo probaremos algunas de estas propiedades:

Ejemplo 50 :

Demostrar las siguientes identidades :

a) $X \subset A$ y $X \subset B \Leftrightarrow X \subset A \cap B$

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = A$

c) $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$

d) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

a) **Demostración de X Ì A y X Ì B Û X Ì A Ç B**

Directo :

Comenzaremos demostrando que : **X Ì A y X Ì B Þ X Ì A Ç B**

Sea **x Î X**, dado que $X \subset A$ y $X \subset B$ tenemos que

$$x \in X \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in X \Rightarrow$$

Ahora si $x \in A$ y $x \in B$ tenemos que **x Î A Ç B**

Luego,

X Ì A Ç B

Recíproco:

Probaremos ahora que : **X Ì A Ç B Þ X Ì A y X Ì B**

En efecto,

Si tomamos tenemos

$$x \in X \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ y } x \in B$$

Luego :

X Ì A y X Ì B ¦

b) **Demostración de A Ì B Û A È B = B**

Directo :

Probaremos : **A Ì B Þ A È B = B**

Tomemos $x \in (A \cup B)$, entonces $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ o $x \in B$

Pero como $A \subset B$, tendremos siempre que $x \in B$. Es decir, **A È B Ì B (I)**

Recíprocamente, todo

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

y por lo tanto, **B Ì A È B (II)**

Luego, de **(I)** y **(II)** por definición de igualdad de conjuntos tenemos :

A È B = B

lo que establece que :

A Ì **B** Þ **A** È **B = B**

Recíproco:

Se probará ahora que: **A** È **B = B** Þ **A** Ì **B**

Tomemos $x \in A$ entonces,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$$

Luego,

A Ì **B** ¦

c) **Demostración de A** Ì **B** Û **B´**Ì **A´**

Directo :

Comenzaremos probando : **A** Ì **B** Þ **B´**Ì **A´**

En efecto, si $x \in B'$ tenemos :

$$x \in B' \Rightarrow x \notin B,$$

como $A \subset B$, deducimos

$$x \notin B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A$$

Luego,

B´Ì **A´**

Recíproco :

Probaremos : **B´**Ì **A´** Þ **A** Ì **B**

Sea $x \in A$, entonces

$$x \in A \Rightarrow x \notin A'$$

Como $B' \subset A'$

$$x \notin A' \Rightarrow x \notin B' \Rightarrow x \in B$$

Luego tenemos,

$$\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \quad ¦$$

d) **Demostración de $(A - B) - C = A - (B \cup C)$:**

Directo:

Probaremos primeramente que **$(A - B) - C \subset A - (B \cup C)$:**

Sea $x \in [(A\text{-}B) - C]$ entonces,

$x \in [(A\text{-}B) - C] \Rightarrow x \in A - B$ y $x \notin C \Rightarrow (x \in A$ y $x \notin B)$ y $x \notin C \Rightarrow$

$x \in A$ y $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in [A - (B \cup C)]$

Recíproco:

Probaremos ahora que **$A - (B \cup C) \subset (A - B) - C$:**

todo $x \in [A - (B \cup C)] \Rightarrow x \in A$ y $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A$ y $(x \notin B$ y $x \notin C) \Rightarrow$

$(x \in A$ y $x \notin B)$ y $x \notin C \Rightarrow x \in (A - B)$ y $x \notin C \Rightarrow x \in [(A\text{-}B) - C]$ ¦

7.4 Pares Ordenados. Producto Cartesiano de Conjuntos

Se llama par ordenado a un conjunto P = (x, y) de dos elementos ordenados . A x se le llama primera componente del par. A y se le llama segunda componente del par. Diremos que dos pares ordenados $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Esta definición nos permite deducir que el orden de las componentes en el par es fundamental, de ahí su nombre. Así de este modo, $(3, 7) \neq (7,3)$.

Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A por B al conjunto de todos los pares (x, y) cuya primera componente pertenece a A y la segunda a B.

El producto de los conjuntos A y B lo denotaremos por :

A´B.

y leeremos "A por B".

En símbolos : **A´ B = {(x, y) : x Î A Ù y Î B}**

Ejemplo 51 :

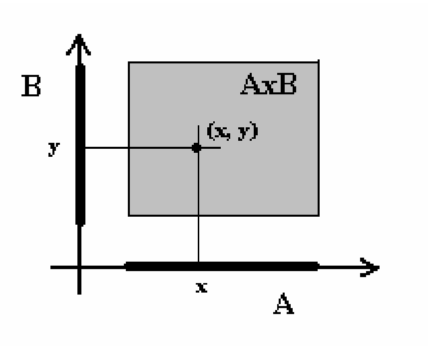
a) Si A = {1, 2} y B = {x, y, z}, entonces

   $A\times B$ = { (1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z) } y

   $B\times A$ = { (x ,1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2) }.

   En este caso cabe observar que $A\times B$ es diferente de $B\times A$.

b) Si A = { a, b }, entonces $A\times A$ = { (a, a), (a, b), (b, a), (b, b) }



Para representar gráficamente A×B se procede de la siguiente manera :

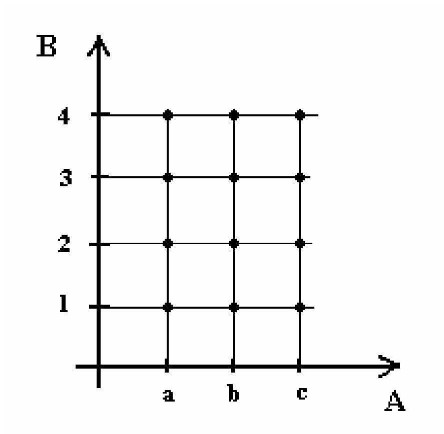
Se representan los conjuntos A y B cada uno sobre una línea recta. Estas rectas se dibujan de modo que sean perpendiculares, una horizontal donde se ha representado el conjunto A y la otra vertical donde esta representado el conjunto B. de esta manera cada par (x, y) de A×B quedará representado por un punto que se obtiene por la intersección de la vertical que pasa por $x \in A$ y la horizontal que pasa por $y \in B$.

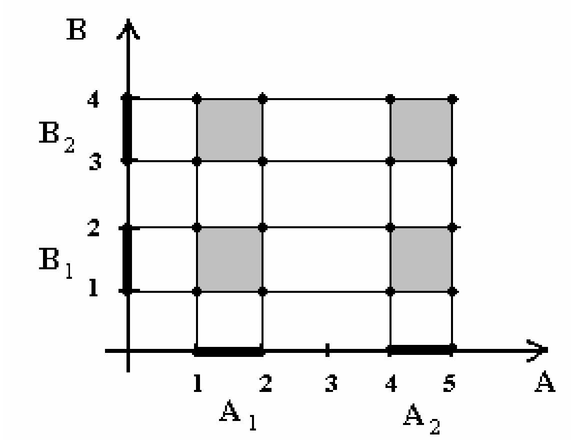
Ejemplo 52 :

Represente gráficamente el producto A×B si :

a) A = { a, b, c } y B = { 1, 2, 3, 4 }

b) $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$, donde $A_1 = \{ x \in \mathbf{R} : 1 \leq x \leq 2 \}$,
$A_2 = \{ x \in \mathbf{R} : 4 \leq x \leq 5 \}$, $B_1 = \{ x \in \mathbf{R} : 1 \leq x \leq 2 \}$ y $B_2 = \{ x \in \mathbf{R} : 3 \leq x \leq 4 \}$





5 PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1 Determine por extensión y comprensión los siguientes conjuntos:

a) Conjunto de los números enteros positivos pares menores que 18.

b) Conjunto de los divisores de 20.

c) Conjunto de las raíces de la ecuación $x^3 - x = 0$.

d) Conjunto de los restos posibles que se pueden obtener al dividir un número entero por 7.

e) Conjunto de divisores de 18.

2 Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$, encuentre todos los subconjuntos posibles de A.

3 Sean A y B subconjuntos arbitrarios disjuntos de un conjunto Universal U :

a) ¿Existe algún elemento u que pertenezca a A, pero no a B?

b) ¿Existe algún elemento de U que pertenezca a A y a B simultáneamente?

4 Responda a a las siguientes preguntas relativas a conjuntos :

a) ¿Es cierto o falso que todo conjunto contiene al menos dos subconjuntos?

b) ¿Qué conjunto contiene como máximo cuatro subconjuntos?

c) ¿Puede un conjunto contener como máximo cuatro subconjuntos?

d) ¿Cuántos subconjuntos puede contener un conjunto de tres elementos y cuántos de n elementos?

e) ¿Puede un conjunto contener un número impar de subconjuntos?

5 Dados los conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, X, 8\}$. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

a) $8 \notin Y$.

b) $Y = \{1, \{1, 2, 3\}, 8\}$.

c) $X \in Y$.

d) $\{1, 2, 3\} \in Y$.

e) $\{1, 2\} \in Y$.

f) $X \notin X$.

g) $\emptyset \subset X$

h) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

i) $\emptyset \in \emptyset$.

j) $\emptyset \notin \{1, 2 \{\emptyset\}\}$

6 Indique si son iguales o no los pares de conjuntos que se indican a continuación:

a) $A = \{x \in \mathbf{N^*} : x \leq 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$, $B = \{1, 2\}$

c) $A = \{x \in N^* : x \text{ es múltiplo de tres y } x \leq 24\}$,
$B = \{x \in N^* : x \text{ es múltiplo de seis y } x \leq 24\}$.

7 Indique si los siguientes conjuntos son o no vacíos :

a) $A = \{x \in N : 5x = 8\}$.

b) $B = \{x \in Q : x^2 - 3 = 0\}$.

c) $D = \{x \in R : x^2 - 4 = 0\}$.

8 Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{c, d, e, f\}$, y $B = \{e, f, g, h, i\}$. Determine los siguientes conjuntos y represéntelos en un diagrama de Venn:

a) $A \cap B$.

b) $A' \cap B$.

c) $A \cap B'$.

d) $A' \cap B'$.

e) $(A \cap B)'$.

f) $A \cap U$.

g) $A \cup B$.

h) $A' \cup B$.

i) $A \cup B'$.

j) $A' \cup B'$.

k) $(A \cup B)'$.

l) $A - B$.

m) $B - A$

9 Sean $U = \{x \in N : x \leq 12\}$; $A = \{0, 1, 3, 5, 7\}$; $B = \{3, 5, 6, 10\}$; $C = \{4, 5, 6, 9, 10\}$. Determine los siguientes conjuntos y represéntelos en un diagrama de Venn:

a) $A \cap (B \cap C)$.

b) $A \cap (B - C)$.

c) $A \cap (B - C)'$.

d) $A \cup (B \cap C)$.

e) $(A \cup B)$.

f) $(A \cap C)' \cup (A \cap B)$.

g) $'(A - B) - C$.

h) $A - (B - C)$.

i) $(A \cap B)'$.

10 Utilizando diagramas de Venn, verifique las identidades siguientes:

a) $A - B = A \cap B'$.

b) $(A - B)' = A' \cup B$.

c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

e) $A - B = B' - A'$.

f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

g) $A \cup (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$.

h) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

11 Para cada una de las siguientes proposiciones relativas a conjuntos A, B y C arbitrarios, Ud. debe demostrarla si es verdadera y dar un contraejemplo en el caso que sea falsa:

a) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

b) $(A \cup B) \cap B' = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

c) $C - (A \cap B) = (C - A) \cap (C - B)$.

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

e) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

f) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = B$.

g) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

12 Dados los siguientes pares ordenados, encuentre los valores de a y b para que sean iguales :

a) $(a + b, 1)$ y $(3, a - b)$.

b) $(2a - b, -5)$ y $(3, a + 6b)$.

13 Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5,\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{4, 5\}$. Encuentre los siguientes conjuntos y represéntelos gráficamente:

a) $A \times B$.

b) $B \times (A \cap B)$.

c) $(A \cup B) \times B$.

d) $A \times (A - B)$.

e) $A \times (B \cup C)$.

f) $(A - B) \times (A - C)$.

14 Demuestre cada una de las siguientes propiedades del producto cartesiano :

a)$A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2 \Leftrightarrow A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$.

b) $A \times (B \cap C) = (A \;\; B) \cap (A \times C)$.

c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

d) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

e) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

f) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.

g) $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$.

h) $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.

i) $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

15 Ilustre cada una de las propiedades del ejercicio anterior con ejemplos y represéntelos gráficamente.

8 Bibliografía

Arcos R., Becerra R., Cruz C. (1984). ***Lenguaje y Métodos de Trabajo***. Facultad de Ingeniería UCV . Caracas - Venezuela.

Cruz C. (1980). ***Matemática de Nivelación***. Facultad de Ingeniería UCV. Caracas - Venezuela.

Arcos R., Baldi C. , Bramaud du Boucheron L., Fernández N. (1997). ***Elementos de lógica y Conjuntos***. Facultad de Ingeniería UCV. Caracas - Venezuela.

Gajardo C. (1985). ***Lógica Matemática. Elementos Fundamentales***. Facultad de Ingeniería ULA. Mérida - Venezuela.

Duo A. (1974). ***Fundamentos de la Matemática***. Editorial Labor S. A. Barcelona - España.

Campedelli L. (1972). ***Fantasía y lógica en la matemática***. Editorial Labor S. A. Barcelona - España.

Hempel C., Wilder R., Nagel E., Newman J., Veblen O., Wesley J., Gasking D., von Mises R., ***Matemática, Verdad, Realidad***. (1974). Ediciones Grijalbo S. A. Barcelona - España.

Garner M. (1981) ***Nuevos Pasatiempos Matemáticos***. Alianza Editorial. Madrid - España.

Baker J., Allen G. (1970). ***BIOLOGÍA e investigación científica***. Fondo Educativo Interamericano, S. A. EE UU.