Capitulo Primero

Lo Antiguo y lo Nuevo Sobre Los Números y Las Numeraciones

Contenido:

1. La Numeraciones Escrita Mas Difundida

Parto de la base que a ninguno de ustedes, lectores de este libro, constituye un gran esfuerzo escribir cualquier número entero; por ejemplo, dentro de los límites de un millón. Para la escritura de los números, empleamos los diez bien conocidos signos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, llamados; cifras. Ahora nadie duda que, con la ayuda de estos diez signos (cifras) podemos escribir un número, ya sea muy grande o muy pequeño, entero o fraccionario.

Los números del uno al nueve, los escribimos con la ayuda de sólo una de las; nueve primeras cifras. Para la escritura de los números del diez al noventa y nueve, necesitamos ya de dos cifras, una de las cuales puede ser también el cero, y así sucesivamente.

Como base de la numeración tomamos el número "diez", por lo que nuestro sistema de numeración se llama decimal.

Es decir, que diez unidades simples (unidades de primer orden) forman una decena (una unidad de segundo orden), diez decenas forman una centena (una unidad de tercer orden), diez centenas forman un millar (una unidad de cuarto orden) y, en general, cada diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.

En muchos pueblos los sistemas de numeración eran decimales. Eso está relacionado con el hecho de que tengamos diez dedos en nuestras manos.
En la escritura de los números, en el primer lugar de la derecha escribimos la cifra correspondiente a las unidades; en segundo lugar, la cifra de las decenas; luego la de las centenas, después la de los millares, etc. Así, por ejemplo, la escritura de 2716 denota que el número se compone de 2 millares, 7 centenas, 4 decenas y 6 unidades.
Si un número carece de unidades de determinado orden, en el lugar correspondiente escribimos un cero. Así, el número que tiene tres millares y cinco unidades, se escribe. 3005. En él no existen decenas ni centenas, es decir, las unidades de segundo * y tercer orden; por tal razón, en los lugares segundo y tercero de la derecha escribimos ceros.
¿Qué particularidad notable podemos encontrar en el sistema de numeración que siempre hemos usado?
En el caso, por ejemplo, del número 14742, usamos dos veces la cifra 4: en el segundo y en el cuarto lugar de la derecha. En tanto que una vez representa 4 decenas, la otra representa 1 millares. En consecuencia, resulta que una misma cifra puede denotar tanto cantidades de unidades, como cantidades de decenas, de centenas, de millares, etc. en función de la posición que ocupe la cifra en la escritura del número. De aquí precisamente que nuestro sistema de numeración se llame posicional.
Volvamos al número 2746, del cual hemos hablado antes. En él, la primera cifra de la derecha (la cifra 6) representa 6 unidades, la segunda cifra de la derecha (4) representa 4 decenas, es decir, el número

$$40 = 4 * 10,$$

la tercera cifra de la derecha (7) representa 7 centenas, o sea, el número

$$700 = 7 * 10 * 10 = 7 * 10^2,$$

y finalmente, la cuarta cifra (2) representa 2 millares, es decir, el número

$$2000 = 2 * 10 * 10 * 10 = 2 * 10^3$$

El mencionado número puede ser escrito, pues, así:

$$2746 = 2000 + 700 + 40 + 6 = 2 ** 10^3 + 7 * 10^2 + 4 * 10 + 6$$

Cada tres órdenes en un número constituyen una clase. Las clases se cuentan siempre de derecha a izquierda. Primero está la llamada primera clase, constituida por las unidades, decenas y centenas; después la segunda clase, con los millares, las decenas de millar y las centenas de millar: luego la tercera clase, constituida por los millones, las decenas de millón y las centenas de millón, etc.
Pensemos un poco en esta cuestión: ¿ Por qué se efectúan tan rápida y fácilmente con los números las cuatro operaciones aritméticas: adición, substracción, multiplicación y división?: Estas ventajas nos son ofrecidas, lógicamente, por el citado principio posicional de la escritura de los números.
En efecto, al hacer una operación aritmética cualquiera con números, trabajamos con las decenas, centenas, millares, etc., como si fueran unidades, y sólo al obtener el resultado final tenemos en cuenta su orden.

Así, para la escritura de los números, empleamos el sistema decimal posicional de numeración. El famoso físico y matemático francés Laplace (siglos XVIII-XIX), escribió acerca del sistema: "La idea de representar todos los números con diez signos, asignándoles además de un valor por su forma otro por su posición, es tan sencilla, que en virtud de esta sencillez resulta difícil imaginarse en qué medida es admirable esta idea".
Ahora casi toda la humanidad utiliza este sencillo sistema de numeración, cuyo principio de construcción y trazo de cifras aparecen con idénticas propiedades pana tolo mundo.
¿Cómo surgió este extraordinario sistema de numeración decimal posicional?
No obstante su sencillez, los hombres necesitaron varios miles de años para llegar a él. No será una exageración si decimos que todos los pueblos del mundo tomaron parte en la creación de dicho sistema.
Inicialmente el sistema decimal posicional de numeración apareció en la India, y ya a mediados del siglo VIII, se usaba ahí ampliamente. Por esa misma época, también surge en China y otros países del Oriente. Los europeos adoptaron este sistema hindú de numeración en el siglo XIII, debido a la influencia árabe. De aquí surgió, precisamente, la denominación, históricamente incorrecta, de "numeración arábiga".
¿Qué sistemas de numeración estaban en uso, antes del surgimiento del decimal posicional?
El enorme interés de esta pregunta, hace necesario un análisis detallado de ella, lo que nos proporcionará la posibilidad de valorar mejor la, ventajas de nuestro sistema de numeración.
Volver

2. Numeración Antigua Egipcia

Una de las más antiguas numeraciones es la egipcia. Data aproximadamente de hace 7000 años, es decir, de más de 3000 años antes de nuestra era. En el transcurso de los tres primeros milenios sufrió cambios insignificantes. Relacionémonos más de cerca con dicha numeración antigua, y fijemos nuestra atención en la forma en que se representaban en ella los signos numéricos, y cómo, con ayuda de ellos, se escribían los números.
En la numeración egipcia existían signos especiales (jeroglíficos) para los números: uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil, un millón. Estos signos están representados en la figura 1.

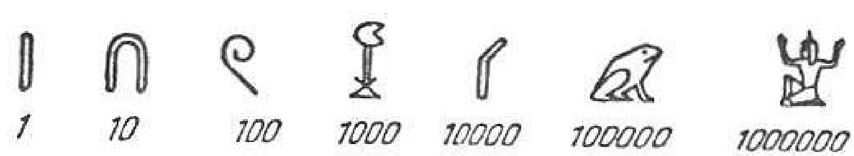


Figura 1. Estos signos especiales (jeroglíficos) eran utilizados por los antiguos egipcios para la notación de los números.

Para representar, por ejemplo, el número entero 23 1415, era suficiente escribir en serie dos jeroglíficos de diez mil luego tres jeroglíficos de mil, uno de cien, cuatro de diez y cinco jeroglíficos para las unidades (ver. fig. 2).

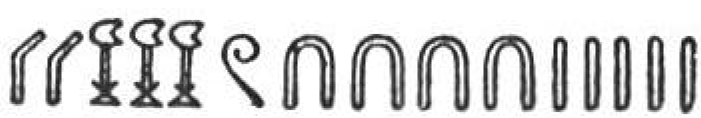


Figura 2. Escritura del número 23 145 en el sistema de numeración egipcio.

Estos símbolos, en la escritura, no podían aparecer más de nueve veces en cada número. En el sistema egipcio de numeración no había signo alguno para el cero.
Este solo ejemplo es suficiente para aprender a escribir los números tal y como los representaban los antiguos egipcios. Este sistema de numeración es muy simple y primitivo. Es un sistema decimal puro, puesto que en la representación de los números enteros se emplea el principio decimal conforme al orden clase. Hay que notar que cada signo numérico representa solamente un número. Así, por ejemplo, el signo para las decenas (ver fig. 1) denota solamente diez unidades. Y no diez decenas o diez centenas, lo que pone en evidencia el por qué el sistema de numeración egipcio no era posiciones.
Volver

3. Numeración Antigua Rusa

Conforme al principio de la numeración egipcia antigua, se construyeron sistemas de numeración en algunos pueblos más, tales como el de la antigua Grecia por ejemplo, del que hablaremos detalladamente más adelante.
En la antigua Rusia, por ejemplo, existió un sistema popular de numeración ampliamente difundido, y elaborado sobre el mismo principio del sistema egipcio, pero distinguiéndose de éste por la representación de los signos numéricos.
Es interesante anotar, que esta numeración era, en la antigua Rusia, inclusive de índole legal: precisamente conforme a tal sistema, sólo que más desarrollado, los recaudadores de impuestos debían llevar los registros en el libro de contribuciones.
El recaudador, leemos en el antiguo “Código de las Leyes”, recibiendo de cualquiera de los arrendadores o propietarios el dinero aportado, deberá él mismo, o por medio de un escribiente, registrar en el libro de contribuciones frente al nombre del arrendador, la cantidad de dinero recaudado, anotando la suma recibida con cifras o signos. Para conocimiento de todos y de cada cual, estos signos se instituyen idénticos para todo lugar, a saber:

diez rublos se denota por el signo	(
un rublo	O
diez kopeks	x
un kopek	|
un cuarto	-

Por ejemplo, veintiocho rublos, cincuenta y siete kopeks y tres cuartos:

((OOOOOOOOxxxxx|||||||---

En otro lugar del mismo tomo del “Código de las Leyes”, nos volvemos a encontrar con una mención acercan del empleo obligatorio de las notaciones numéricas nacionales. Se dan signos especiales para los millares de rublos, en forma de una estrella de seis puntas con una cruz en su centro, y para las centenas, en forma de una rueda con ocho rayos. Pero las notaciones para los rublos y las decenas de kopeks aquí se establecen en distinta forma que en la ley anterior. Veamos el texto de la ley acerca de los así llamados "signos tributarios"
Que en todo recibo entregado al Representante de la Alta Estirpe, además de la redacción con palabras se escriba, con signos especiales, los rublos y kopeks aportados, de tal manera que al

realizar un simple cálculo de todos los números, pueda ser aseverada la veracidad de las declaraciones[1]. Los signos empleados en el recibo significan:

una estrella	mil rublos
una rueda	cien rublos
diez rublos	.
X	un rublo,
||||||||||	diez kopeks
|	un kopek.

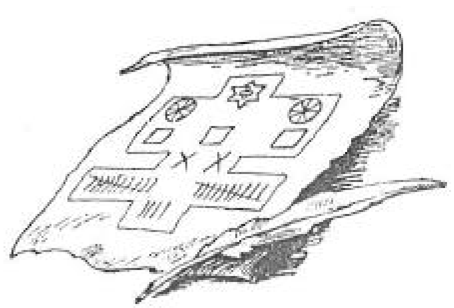


Figura 3. Inscripción antigua en un recites de pago de impuesto ("tributo"), que representa la suma 1232 rublos, 24 kopeks.

Para que no puedan hacerse aquí adiciones de ningún tipo, todos los signos se rodean por medio de un trazo constituido por líneas rectas.
Por ejemplo, mil doscientos treinta y dos rublos; veinticuatro kopeks se representan así (Ver fig. 3).
Volver

4. Numeración Romana

De todas las numeraciones antiguas, la romana es, posiblemente la única que se ha conservado hasta hoy, y que es empleada con frecuencia. Las cifras romanas se utilizan hoy día para las notaciones de los siglos, las numeraciones de los capítulos en los libros, etc.
Para la escritura de los números enteros en la numeración romana, es necesario recordar las representaciones de los siete números fundamentales:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Con su ayuda, podemos escribir todo número entero menor que 4000, y algunas de las cifras (I, X, C, M) pueden repetirse consecutivamente hasta tres veces.
En la escritura de los números en el sistema romano de numeración, una cifra menor puede estar a la derecha de una mayor; en este caso, la menor se adiciona a la mayor. Por ejemplo, el número 283 lo podernos escribir, en signos romanos así:

CCLXXXIII

[1] Esto muestra que los signos escritos tenían una amplia utilización entre el pueblo.

es decir, 200 + 50 + 30 + 3 = 283. Aquí, la cifra que representa a la centena aparece dos veces, y las que representan respectivamente a las decenas y a las unidades aparecen tres veces.
Una cifra menor, también puede escribirse a la izquierda de una mayor, con lo que aquella se substrae de ésta. En este caso no se admite la repetición de la cifra menor. Los ejemplos que se proporcionan enseguida ayudan a aclarar completamente el método de escritura de los números en la numeración romana.
Escribamos en romanos los números 94, 944, 1809, 1959:

XCIV	= 100 - 10 + 5 - 1	= 94
CMXLIV	= 1000 - 100 + 50 - 10 + 5 - 1	= 944
MDCCCIX	= 1000 + 500 + 300 + 10 - 1	= 1809
MCMLIX	= 1000 + 1000 - 100 + 50 + 10 - 1	= 1959

¿Se ha observado que en este sistema no existe signo para representar el cero? En la escritura del número 1809, por ejemplo, no usamos el cero.

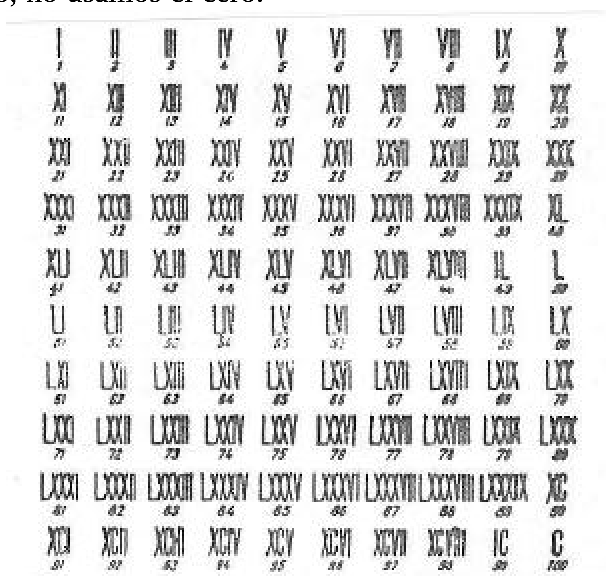


Figura 4.- Así se escriben en la numeración romana todos y cada uno de los números romanos del uno al cien.

Estudien ustedes la figura 4, donde proporcionamos la escritura en la numeración romana de todos los números enteros del 1 al 100.
Con la ayuda de las cifras romanas se pueden escribir también grandes números para lo cual, después de la escritura del signo de millares se introduce la letra latina *M* como subíndice.
Escribamos, como ejemplo, el número 417.986:

CDXVIIM CMLXXXVI

El sistema romano de numeración, como el antiguo egipcio, no es posiciones: cada cifra en él representa sólo un número estrictamente definido. Sin embargo, a diferencia del antiguo egipcio, no es decimal puro. La presencia en el sistema romano de signos especiales para los números cinco, cincuenta, y quinientos, muestran que en él existen fuertes vestigios de un sistema de numeración quinario.

La numeración romana no está adaptada, en modo alguno, para la realización de operaciones aritméticas en forma escrita. Esta es su desventaja mayor.

Volver

5. Numeración Antigua Griega

Continuemos nuestro relato acerca de los sistemas no posicionales[2] de numeración, y al final del capítulo describiremos detalladamente uno de los más antiguos sistemas de numeración (aunque por supuesto, posterior al egipcio): el babilónico, que fue el primer sistema posicional.

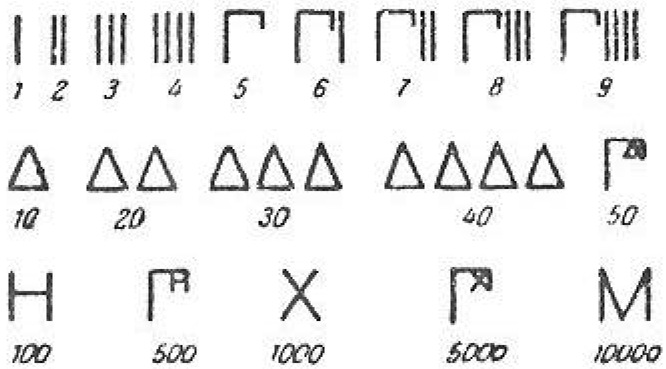


Figura 5. Escritura de algunos números en la numeración ática o herodiánica.

Un sistema muy parecido al romano es el llamado ático o herodiánico[3], que se utilizó en la Grecia antigua. En la figura 5 se muestran las representaciones de varios números de esta numeración. A diferencia de la numeración romana este dibujo muestra que aquí, los signos parar los números uno, diez, cien y mil, pueden repetirse no tres, sino cuatro veces, en cambio, se prohíbe escribir una cifra menor la izquierda de una mayor.

En la figura 6 se dan ejemplos de la escritura de números enteros en el sistema ático de numeración, que, aclaran completamente el método de tal escritura.

---

[2] En general, a los sistemas de numeración no decimales. Le dedicamos más adelante un capítulo entero (Ver Cap. IV).

[3] Herodiano era un Historiador griego de los siglo II-III de N. E. En sus obras científicas fue donde primero se mencionó la numeración ática. Las más antigua de las escrituras se encontrarán con respecto a esta numeración, corresponde al siglo VI antes de nuestra era.

Figura 6. Ejemplos que aclaran el método de escritura de los números enteros en el sistema ático de numeración.

Durante el siglo III A. de N. E., en Grecia, en lugar de la numeración ática se utilizaba la numeración jónica, donde números enteros se representaban con letras del alfabeto griego sobrerrayadas; sistema de numeración denominado alfabético.

Figura 7.

Como se ve, este sistema es decimal, pero no posicional.

Esto también sucede en otras numeraciones alfabéticas.
[Volver]

6. Numeración Eslava

Los pueblos eslavos también utilizaron una numeración alfabética. En la figura 8 están representadas las 27 letras del alfabeto eslavo. Bajo cada letra está escrito su nombre y el valor numérico que le corresponde. Sobre la letra que representa al número hay un signo (ver fig. 8) llamado "titlo".

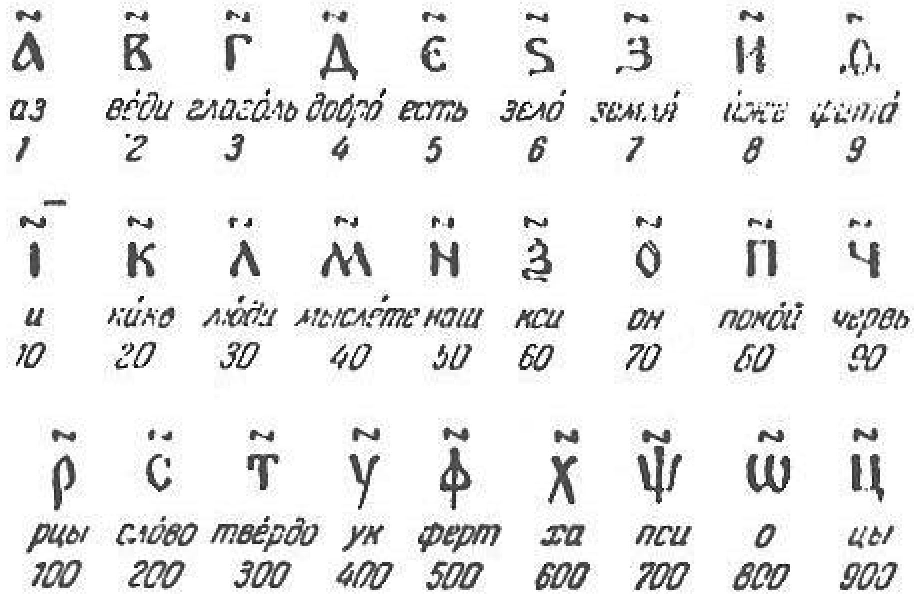


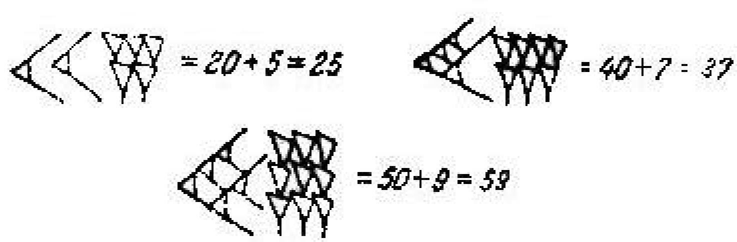
Figura 8. Notación de los números en la numeración alfabética eslava. Los nombres de las letras, que en el dibujo están escritas en ruso, se traducen como sigue, en su orden correspondiente: az vedi glagol dobró est zeló zenilia izhe fitá i kako lyudi mislietie nash ksi on pokoy cherv rtsi slevo tvierbo uk fert ja psi o tsy.

Volver

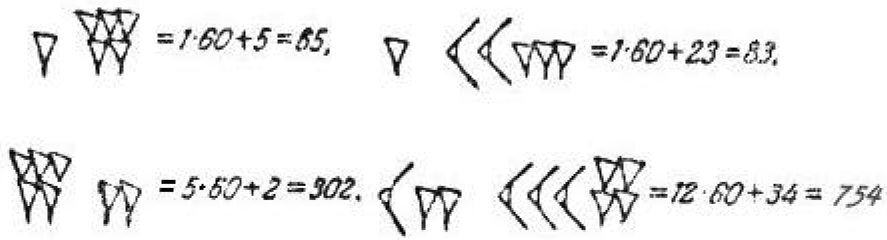
7. Numeración Babilónica

El más interesante de todos los antiguos sistemas de numeración es el babilónico, que surgió aproximadamente en el año 2000 A. de N.E. Fue el primer sistema posicional de numeración, conocido por nosotros. Los números en el sistema se representaban con la ayuda de sólo dos símbolos, una cuña vertical V que representaba a la unidad y una cuña horizontal para el número diez. Estas cuñas resaltaban en las tablillas de las cuñas de arcilla, por los palitos inclinados, y tomaban la forma de un prisma. De aquí surgió la denominación de cuneiforme para la escritura de los antiguos babilonios.

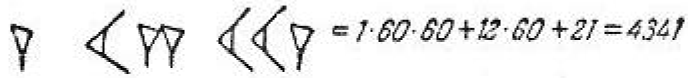
Con la ayuda de los dos signos mencionados, todos los, números enteros del 1 al 59 conforme a un sistema decimal se podían escribir exactamente como en la numeración egipcia: es decir, que los signos para el diez y la unidad repetían, correspondientemente tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades. Proporcionemos algunos ejemplos explicativos:



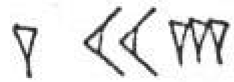
Hasta el momento no hemos encontrado nada nuevo. Lo nuevo empieza con la escritura del número 60 donde se utiliza el mismo signo que para el 1, pero con un mayor intervalo entre él y los signos restantes. Proporcionemos también, aquí, ejemplos aclaratorios:



De esta manera, ya podemos representar los números del 1 al 59 * 60 + 59 = 3599.
Enseguida está una unidad de un nuevo orden (es decir el número 1 * 60 * 60 = 3600), que también se representa por el signo para la unidad; por ejemplo:

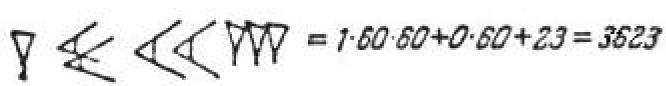


De esta manera, la unidad de segundo orden representada por el mismo signo es 60 veces mayor que la de primer orden, y la unidad de tercer orden es 60 veces mayor que la de segundo y 3600 veces mayor (60 * 60 = 3600) que la unidad de primer orden. Y así sucesivamente.
¿Pero qué sucede si uno de los órdenes intermedios no existe?, preguntarán ustedes. ¿Cómo se escribe, por ejemplo, el número 1 * 60 * 60 + 23 = 3623? Si se escribiera simplemente en esta forma:



Podría confundírsele con el número 1 * 60 + 23 = 83. Para evitar confusiones se introdujo, posteriormente, el signo separador, que jugaba el mismo papel que el signo "cero"

juega en nuestra numeración. Así pues, con la ayuda de dicho signo separador, el número 3623 se escribirá así:



El signo separador babilonio nunca se colocaba al final de un número; por tal razón, los números 3; 3 * 60 = 180: 3 * 60 * 60 = 10800; etc., se representaban en forma idéntica. Se convenía en determinar conforme al sentido del texto, a cuál de estos números se refería lo expuesto.

Es notable el que, en la matemática babilónica, se empleara un mismo signo, tanto para la escritura de los números enteros, como para la el de las fracciones. Por ejemplo, las tres cuñas verticales escritas en fila, podían denotar 3/60, ó 3/60*60 = 3/3.600, ó 3/60*60*60 = 3/216.000
¿ Cuáles son las conclusiones que podemos sacar, ahora, sobre las particularidades de la numeración babilónica?
En primer lugar, observamos que este sistema de numeración es posicional. Así, un mismo signo puede representar en él, tanto 1 como 1 * 60, como 1*60*60 = 1 * 60^2 = 1 * 3600, etc., en función del lugar en que dicho signo esté escrito. Exactamente como en nuestro sistema de numeración, una cifra, por ejemplo, 2, puede representar los números: 2, ó 2 * 10 = 20, ó 2 * 10 * 10 = 2 X 10^2 = 2 * 100 = 200, etc., según si está en el primero, segundo, tercero, etc, orden.
Sin embargo, el principio posicional, en la numeración babilónica, se lleva a cabo en órdenes sexagesimales. Por tal motivo, dicha numeración se llama sistema de numeración posicional sexagesimal. Los números hasta el 60 se escribían, en esto sistema, conforme al principio decimal
En segundo lugar la numeración babilónica permitía una escritura sencilla de las fracciones sexagesimales, es decir, las fracciones con denominadores 60, 60 * 60 = 3600, 60 * 60 * 60 = 216 000, etc.
Las fracciones sexagesimales se utilizaron mucho en la época de los babilonios. Pero aún hoy dividimos 1 hora en 60 minutos, y 1 minuto en 60 segundos. Exactamente igual, dividimos la circunferencia en 360 partes, llamadas grados, un grado lo dividimos en 60 minutos, en tanto que un minuto en 60 segundos.
Como se ve, el sistema de numeración hindú, ampliamente usado por nosotros, está lejos de ser el único método de notación de los números.
Han existido también, otros procedimientos de representación de los números; así, por ejemplo, algunos comerciantes tenían sus signos secretos para las notaciones numéricas: las llamada, "claves" comerciales. Sobre ellas hablaremos ahora detenidamente.
Volver

8. "CLAVES" SECRETAS COMERCIALES

En tiempos pre-revolucionarios, en las cosas compradas en los comercios ambulantes o en las tiendas particulares[4], especialmente de provincia, se veían frecuentemente unas letras indescifrables, por ejemplo,

a ve v uo.

Se trata simplemente de dos claves: una es del precio de venta que tiene la mercancía, y la otra es del costo que tuvo la misma para el comerciante. Así, éste puede calcular cuánto rebajarla en caso de que el cliente le pidiese descuento.

[4] Aunque esta costumbre ha desaparecido -por innecesaria- en la URSS y otros países, sigue siendo muy usual entre los pueblos de sistema capitalista. (N. del Editor)

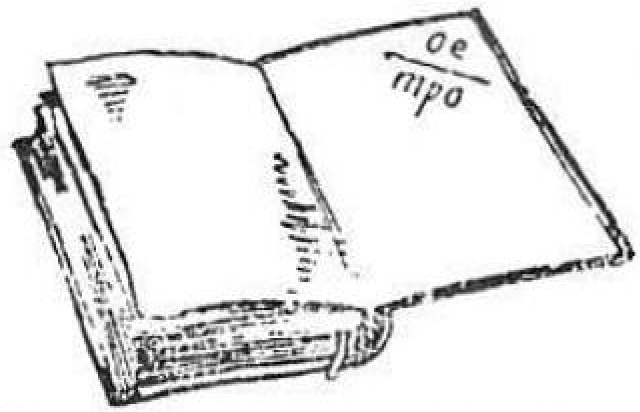


Figura 9. "Clave" comercial en la cubierta de un libro (en ella se representa con las letras superiores, el valor intrínseco, o costo, del libro, y con las letras inferiores el precio de renta).

El sistema de notaciones era muy sencillo. El vendedor escogía cualquier palabra de diez diferentes letras: por ejemplo la palabra "feudalismo". La primera letra de la palabra representaba al uno, la segunda, 2 la tercera, 3, y así sucesivamente hasta la última letra, que representaba al cero. Con la ayuda de estas letras-cifras condicionales el comerciante anotaba sobre las mercancías, su precio, guardando en estricto secreto "la clave" de su sistema de ganancias.
Si por ejemplo, era escogida la palabra:

f	e	u	d	a	l	i	s	m	o
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

el precio 4 rublos, 75 kopeks, se escribía **d ia**
Algunas veces, sobre la mercancía se escribía el precio en forma de quebrado (fig. 9), por ejemplo, en un libro se encontraba la notación

ao / f en

eso significaba, en la clave "f e u d a l i s m o" que era necesario pedir un rublo 25 kopeks, si el mismo libro valía 50 kopeks.

9. Peones en Lugar de Números

Solamente después de lo indicado, es fácil comprender que los números se pueden representar no solamente con ayuda de cifras, sino también con cualesquiera otros signos y aún objetos: lápices, pluma, reglas, gomas, etc. Basta con atribuir a cada objeto el valor de una cifra cualquier determinada. Se puede inclusive, por curiosidad, con ayuda de tales cifras objetos, representar las operaciones con los números: sumar, restar, multiplicar, dividir.

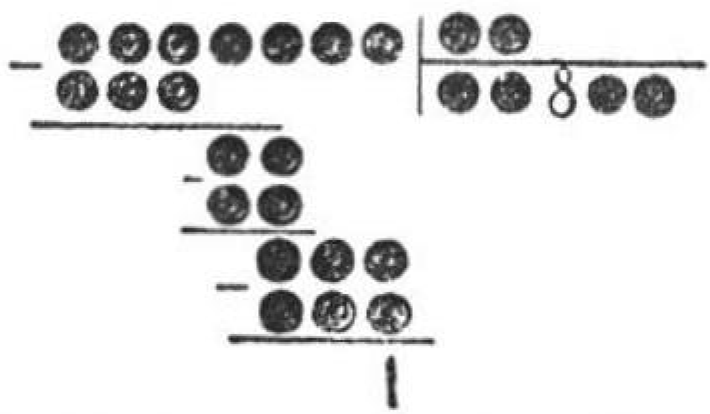


Figura 10. Representación del problema publicado por una revista de ajedrez, donde casi todas las cifras están substituidas por peones.

En una revista de ajedrez fue presentado un problema: determinar el verdadero significado del ejemplo de división de números, representado en la fig. 10, en el cual casi toda, las cifras están substituidas por peones. De 28 cifras, sólo 2 son conocidas: el 8 en el cociente y, el 1 en el residuo. Los otros 26 signos son peones de ajedrez, por lo que probablemente parecerá que el problema no tiene sentido. Sin embargo ahora veremos una manera de solucionar el problema, basándonos en el proceso de la división.

La segunda cifra del cociente es, naturalmente; cero, ya que al residuos de la primera resta le añadimos no una cifra sino dos. De la misma manera, después de que añadamos la primera cifra, formamos un número menor que el divisor; también en tales casos la cifra siguiente del cociente es cero.

Exactamente por lo mismo; razonamientos, establece que la cuarta cifra del cociente es, también cero.

Fijando la atención en la disposición de los peones, observamos que el divisor de dos cifras, al ser multiplicado por 8 da un número de dos cifras; al multiplicarlo por la primera cifra (aún desconocida) del cociente, se obtiene un número de tres cifras. Es decir, esta primera cifra del conciente es mayor que 8; tal cifra puede ser, solamente, el 9.

Por el mismo método, establecemos que también la última cifra del cociente es 9.

Ahora, el cociente está completo; es: 90 809. Obtengamos hora el divisor. Como se ve en la figura 10, consta de dos cifras; además, la disposición de los peones indica que este número de dos cifras, al multiplicarse por 8, da un número de dos cifras; el resultado de multiplicarlo por nueve, consiste en un número de tres cifras. ¿Cuál es este número? Realicemos, las pruebas empezando con el menor número de dos cifras: el 10.

10 * 8 = 80.
10 * 9 = 90.

El número 10, como vemos, no satisface las condiciones requeridas: ambos productos son números de dos cifras. Probemos con el siguiente número de dos cifras, el 11:

11 * 8 = 88
11 * 9 = 99

El número 11 tampoco sirve, pues los dos productos tienen otra vez dos cifras. Probemos ahora con el 12:

12 * 8 = 96
12 * 9 = 108

El número 12 satisface todas las condiciones. Pero, ¿no habrá otros números que también las satisfagan? Probemos con el 13:

13 * 8 = 104
13 * 9 = 117

Ambos productos son números de tres cifras, por lo que el 13 no sirve. Está claro que tampoco servirán todos los números mayores que 13.
Así, el único divisor posible es el 12. Conociendo el divisor, el cociente y el residuo, fácilmente podemos encontrar el dividendo, invirtiendo el proceso de la división.
Así, dividendo

90 809 * 12 + 1 = 1 089 709

Finalmente tenemos, por consiguiente, el ejemplo dado de división con residuo:

```
 1   0   8   9   7   0   9  /1   2
–1   0   8                    9   0   8   0   9
             9   7
         –   9   6
                 1   0   9
             –   1   0   8
                         1
```

Como vemos, con dos cifras conocidas hemos, pedido encontrar el valor de 26 cifras desconocidas.
Volver

10. La Aritmética en el Desayuno

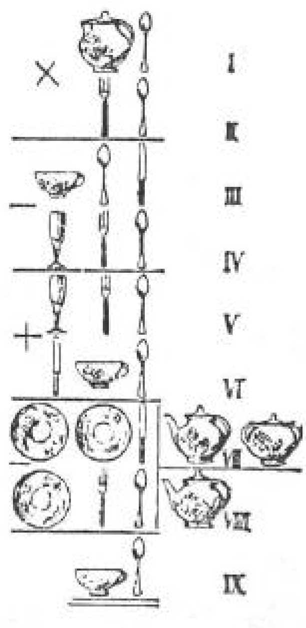


Figura 11 ¿A qué números corresponden estos símbolos aritméticos?

Ante nosotros hay una serie de operaciones con números, representados por los objetos de servicio de una mesa (fig. 11): El tenedor, la cuchara, el cuchillo, la jarra, la tetera, el plato; todos éstos son signos, cada uno de los cuales substituye a una cifra determinada.

Observando este grupo de cuchillos, tenedores, vajilla, etc., cabe preguntar: ¿Cuáles son, precisamente, los números representados aquí?

A primera vista, el problema parece ser muy difícil: como si se tratara de descifrar jeroglíficos, tal y como lo hizo hace algún tiempo Champolion[5]. Pero este problema es mucho más sencillo: ustedes saben que los números, aunque aquí están representados por cuchillos, cucharas, tenedores, etc, están escritos conforme al sistema decimal de numeración, es decir, que sabemos que el plato colocado en segundo lugar (leyendo desde la derecha), es una cifra de las decenas, así como el objeto que está a su derecha es una cifra de las unidades, y el que está a su izquierda es la cifra de las centenas. Además, ustedes saben que la disposición de todos estos objetos tiene un determinado sentido, el cual surge de la esencia de las operaciones aritméticas, realizadas con los números denotados por ellos. Todo esto, puede, en gran medida, facilitar a ustedes la resolución del problema presentado.

¿Con qué números se realizan las operaciones aritméticas, aquí indicadas?

Veamos cómo se pueden encontrar los valores de los objetos aquí dispuestos. Considerando los tres primeros renglones en nuestro dibujo, verán que cuchara, multiplicada por cuchara, da cuchillo; y de los renglones 3, 4 y 5, vemos que cuchillo menos cuchara da cuchara es decir, cuchara + cuchara = cuchillo. ¿Qué cifra da el mismo resultado al multiplicarse por sí misma que al duplicarse? Esta puede ser únicamente el 2, porque 2 * 2 = 2 + 2. Así, sabemos ya que cuchara = 2 y, por lo tanto, cuchillo = 4.

[5] Champolion (1790-1532). Famoso filólogo francés fundador de la egiptología o, ciencia que estudia el idioma la historia y la cultura del Egipto antiguo y de los países con frontera común con él.

Ahora, sigamos, adelante, ¿Qué cifra está representada por el tenedor? Lo averiguaremos por las primeras 3 líneas, conde el tenedor aparece multiplicando, y por los renglones III, IV y V, donde aparece el tenedor en la substracción. En el grupo de la substracción vemos que, en el orden de las decenas, al restar tenedor de cuchara, obtenemos tenedor, es decir, en la substracción 2 - tenedor, obtenemos tenedor. Esto puede ser en dos casos: o tenedor = 1, y por lo tanto, 2-1=1, o tenedor = 6, y entonces substrayendo 6 de 12 (una unidad de orden superior se representa por taza), obtenemos 6. ¿Cuál elegir: 1 ó 6?
Probemos el 6 para el tenedor en otras operaciones. Dirijamos la atención a la multiplicación de los números que se hallan en los renglones I y II. Si tenedor = 6, entonces en el segundo renglón está el número 62 (ya sabemos que cuchara = 2). No es difícil entender, que en tal caso, en el primer renglón deberá estar el número 12, y la jarra representará la cifra 1. En verdad, si la jarra denotara la cifra 2 o cualquier otra cifra mayor, el producto de los números de los renglones I y II sería un número de cuatro cifras, y no de tres, como debe ser. Así, si tenedor = 6, en el primer renglón está el número 12, y en el 11, el 62. Por lo tanto, su producto es 12 * 62 = 744.
Pero esto es imposible, porque la cifra de las decenas de este producto es cuchara, es decir, 2, y no 4 como habíamos obtenido. Esto quiere decir, que tenedor no es igual a 6 como se suponía, y por lo tanto es necesario considerarlo igual a uno.
Conociendo por tales, búsquedas, en verdad bastante largos, que el tenedor denota la cifra 1, en adelante ya iremos más rápida y certeramente. De la operación de la substracción, en los renglones III y IV, vemos que taza puede ser 6, o bien 8. Pero el 8 no puede ser, porque implicaría que la copa fuera 4, y sabemos que la cifra cuatro esta denotarla por el cuchillo. Así, la taza representa a la cifra 6 y, por lo tanto, la copa a la cifra 3.
¿Cuál es la cifra que está representada por la jarra en el renglón 1? Esto es fácil de saber, si nos es dado el producto (III renglón, 624) y uno de los factores (II renglón, 12). Dividiendo 624 entre 12, obtenemos 52. Por lo tanto, la jarra = 5.
El valor del plato se determina fácilmente: en el VII renglón, plato = tenedor + taza = copa + cuchillo, es decir, plato = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.
Ahora, sólo falta descifrar el valor numérico de la tetera y de la azucarera en el VII renglón. Puesto que para las cifras 1, 2, 3, 1, 5, 6 y 7 los objetos ya han sido encontrados, queda solamente elegir entre 8, 9 y 0. Substituyendo en la operación de división, representarla en los tres último renglones, en lugar de los objetos las cifras; correspondientes, obtenemos la disposición siguiente (con las letras *t* y *a* se denotan, respectivamente, la tetera y la azucarera):

$$\begin{array}{rl} 774 & : ta = \quad 1 \\ -\quad 712 & \\ 62 & \end{array}$$

El número 712, como vemos, es el producto de los dos números desconocidos, *ta* y *t* que no pueden ser, naturalmente, ni cero, ni terminados en cero: es decir, ni *t*, ni *a* son cero. Entonces, quedan ya sólo dos alternativas: $t = 8$ y $a = 9$ o bien, $t = 9$ y $a = 8$. Pero multiplicando 98 * 8 = 712 no obtenemos 712; por consiguiente, la tetera representa al 8, y la azucarera al 9 (efectivamente: 89 * 8 = 712).
Así, por medio de sencillos cálculos aritméticos desciframos la inscripción jeroglífica de los objetos de servicio de una mesa:

tenedor 1

cuchara	2
copa	3
cuchillo	4
jarra	5
taza	6
plato	7
tetera	8
azucarera	9

Y toda la serie de operaciones aritméticas, representada por este original servicio de mesa, adquiere, sentido:

```
  52
 *12
 624
-312
+462
 774  :89=8
-712
  62
```

Volver

11. Charadas Aritméticas

Lo que denomino charadas aritmética constituye un juego recreativo: la adivinanza de determinada palabra por la resolución de un problema al estilo del que resolvimos en el párrafo anterior. El adivinador piensa una palabra de 10 letra, diferentes (no repetidas). Por ejemplo: terminado, acostumbre, impersonal. Tomando letras de la palabra concebida, por cifras, representará por medio de estas letras cualquier caso de división. Si la palabra proyectada es *terminados*, se puede dar un ejemplo de división así:

t	e	r	m	i	n	a	d	o	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 4517820 = *mitades*; divisor: 87890 = *dados*

4517820	:	87890	=	51	*mitades*	:	*dados*	= *it*
– 4394500					– *mromis*			
123320					*terres*			
– 87890					– *dados*			
35430					*rimrs*			

Se pueden tomar también otras palabras:

dividendo: 8945673 = *dominar*; divisor: 45670 = *minas*

	dominar	:	*minas*	=	*toi*
–	*minas*				
	mradna				
–	*mttsrs*				
	endrar				
–	*eedris*				
	msser				

La representación literal de un determinado caso de división, se confía a un adivinador, quien conforme a ésto, en una primera ojeada sobre el conjunto de palabras incoherentes, deberá adivinar la palabra concebida. Como se debe tratar de descubrir el valor numérico de las letras en semejantes casos, ya lo sabe el lector: lo explicamos durante la resolución del problema del párrafo anterior. Con cierta paciencia, se pueden descifrar estas charadas aritméticas, a condición únicamente de que el ejemplo sea bastante largo y proporcione el material necesario para las suposiciones y pruebas. Si son escogidas palabras que den casos excesivamente cortos de la división, por ejemplo:

a	c	o	s	t	u	m	b	r	e
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 21411 = *casas*; divisor: 9053 = *reto*

	casas	:	*retos*	=	*c*
–	*abaeu*				
	ooeb				

entonces, la adivinación es muy laboriosa. En semejantes casos, es necesario solicitar, del adivinador, la continuación de la división hasta centésimos o milésimos, es decir, obtener en el cociente, aún, dos o tres fracciones decimales. He aquí un ejemplo de división hasta centésimos:

i	m	p	e	r	s	o	n	a	l
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

dividendo: 21039 = *milpa*; divisor: 2939 = *mapa*

$$\begin{array}{rl} & \textit{milpa} \quad : \quad \textit{mapa} \quad = \quad \textit{ois} \\ - & \underline{\textit{mlrop}} \\ & \textit{essl} \\ - & \underline{\textit{mapa}} \\ & \textit{iomil} \\ - & \underline{\textit{iospe}} \\ & \textit{ros} \end{array}$$

Si en este caso nos limitásemos a la parte entera (o), la clave de la palabra propuesta sería poco probable.
En cuanto a las palabras empleadas en calidad de "clave" para semejantes charadas, su elección no es tan difícil como parece; además de las antes indicadas se pueden utilizar las palabras: *futbolista, inyectarlo, esquivador, profetizas, reticulado, esculpidor*
Volver

12. Descubriendo un Número de Tres Cifras
Veamos aún otro acertijo aritmético de distinto carácter. Un número desconocido consiste de tres cifras diferentes: *A*, *B*, *C*. Lo escribimos, condicionalmente, así: *ABC*, teniendo en mente, que *C* es la cifra de las unidades, *B* la de las decenas y *A*, la de las centenas. Es necesario hallar este número, si es sabido que:

$$\begin{array}{lr} & ABC \\ \times & BAC \\ \hline & **** \\ + & **A \\ & ***B \\ \hline & ****** \end{array}$$

Los asteriscos denotan cifras desconocidas. Procedamos a encontrar todas:
Ante todo, establezcamos que ni *A*, ni *B*, ni *C* son cero, pues de lo contrario no se podrían obtener tres renglones de productos parciales.
Observemos además que:

el producto *C* X *A* termina en *A*
el producto *C* X *B* termina en *B*

de donde deducimos que *C* puede ser 1 ó 6. Para la unidad, nuestra consideración es evidente; para el 6 se aclara con los ejemplos:

6 X 2 = 12;
6 X 8 = 48;
6 X 4 = 24.

Otras cifras no poseen semejante propiedad. Pero si *C* fuera 1, el primer producto parcial no sería de cuatro cifras, sino solamente de tres. Queda, por consiguiente, una posibilidad: $C = 6$.
Nos convencemos ahora de que $C = 6$ y que, por lo tanto, *A* y *B* pueden ser solamente 2, 4 u 8; pero como el segundo producto parcial consiste solamente de tres cifras, entonces *A* no puede ser ni 4 ni 8, y por lo tanto $A = 2$.
Para *B* quedan dos posibilidades: $B = 4$, y $B = 8$. Si con $A = 2$, *B* fuera 4, el último producto parcial consistiría de tres cifras y no de cuatro; luego, $B = 8$.

Así tenemos, $A = 2$, $B = 8$, $C = 6$. El número buscado es 286, y la multiplicación queda como sigue:

$$
\begin{array}{rr}
 & 286 \\
\times & 826 \\
\hline
 & 1716 \\
+ & 572 \\
 & 2288 \\
\hline
 & 236236
\end{array}
$$

Volver

13. El Sistema Decimal de Los Armarios de Libros
El sistema de numeración decimal halla, de paso, aplicación allí donde no era de esperarse, como en las bibliotecas en 1a distribución de libros conforme a secciones.
En algunas bibliotecas masivas se utiliza tal sistema de clasificación de los libros, en la cual un libro tiene, en todo lugar, idéntica notación numérica ("clave"). Este sistema se denomina decimal y libra al lector de la necesidad de consultar el catálogo al requerirse libros de una u otra sección.
El sistema es sencillo y muy conveniente. Su esencia consiste en que, a cada rama del conocimiento se le da una notación numérica en tal forma, que las cifras que la componen informan acerca del lugar que ocupa dicha rama en la organización general de las materias:
Todos los libros se distribuyen, ante todo, conforme a diez secciones principales, que se denotan por las cifras del 0 al 9:

0 Obras de carácter general.
1 Filosofía.
2 Historia de la religión y literatura antirreligiosa.
3 Ciencias sociales. Derecho.
4 Filología. Lenguas.
5 Ciencias, físico-matemáticas y naturales
6 Ciencias aplicadas (la medicina, la técnica, la agricultura, etc.)
7 Bellas Artes.
8 literatura.
9 Historia, geografía, biografías.

La primera cifra de la clave (es decir, de la notación numérica) conforme a este sistema, indica directamente a cual de las secciones de libros enumeradas se refiere. Todo libro de filosofía tiene una clave que empieza con 1, de matemáticas con 5, de técnica con 6, etc. Si la clave empieza, por

ejemplo, con la cifra 4, entonces, sin necesidad de revisar los libros, ustedes saben con anticipación que se trata cae la sección de lingüística.
Además, cada una de las secciones, a su vez enumerada se subdividen en 10 subsecciones, que también se denotan por las cifras del 0 al 9; estas cifras ocupan, en la clave, el segundo lugar. Por ejemplo, la 5a. sección que contiene libros de ciencias físico-matemáticas y naturales, se subdivide en las siguientes subsecciones:

50	Obras generales de ciencias físico-matemáticas naturales
51	Matemática.
52	Astronomía. Geodesia.
53	Física. Mecánica Teórica.
54	Química. Mineralogía.
55	Geología.
56	Paleontología.
57	Biología; Antropología. Antropología.
58	Botánica.
53	Zoología.

En forma semejante se dividen, también, las otras secciones. Por ejemplo, en la sección de ciencias aplicadas (6), a la subsección de medicina le corresponde el número 61, a la de agricultura el 63, al comercio y vías de comunicación.
Volver

Los signos y denominaciones aritméticas en diversos pueblos
Cabe pensar que los signos aritméticos, hasta cierto grado, son internacionales, y que son idénticos en todos los pueblos de cultura europea. Esto es cierto sólo con relación a la mayoría de los signos, pero no con relación a todos. Los signos + y -, los signos *x y*: se utilizan con el mismo sentido entre los alemanes, franceses e ingleses. Pero el punto como signo de multiplicación se aplica de diferente forma entre diversos pueblos. Mientras que algunos escriben 1a multiplicación 7.8, otros la denotan como 7·8, elevando el punto a la mitad de la cifra. También el punto decimal se escribe de muy diversas maneras: mientras algunos, como nosotros (se refiere a los soviéticos), escribimos 4,5, otros escriben 4.5, y unos terceros 4·5, colocando el punto arriba de la mitad. Además, cuando se trata de escribir un número decimal que no tiene parte entera, los norteamericanos y los ingleses omiten el cero, lo que no sucede en ningún lugar de Europa Continental. En libros norteamericanos, frecuentemente se pueden hallar notaciones como .725, ·725. o aún ,725 en vez de 0,725 (en México se escribe 0.725). La descomposición de un número en clases se denota, también, en diversas formas. Así, en algunos países se separan las clases con puntos (15.000.000), en otros con comas (15,000,000), y en otros se acostumbra dejar espacio libres, sin signo alguno entre clase y clase (15 000 000). Es instructivo observar, después de eso, cómo se modifica el método de denominación de un mismo número al pasar de una lengua a otra. E1 número 18, en ruso se dice vociemnadtsat es decir, primero se pronuncian las unidades (8) y luego las decenas (10), mientras que en español es a la inverso. En alemán, ese mismo número en la misma sucesión, se lee achtzhen, es decir, ocho diez; en francés, se dice diez ocho (dix-huit). En la siguiente tabla vemos hasta qué punto son distintos, en diversos pueblos, los métodos de denominación del mismo número 18:

en ruso 8 10

en alemán 8 10
en francés 10 8
en armenio 10 + 8
en griego 8 + 10
en latín menos 2 , 20
en neozelandés 11 + 7
en lituano 8 arriba de 10

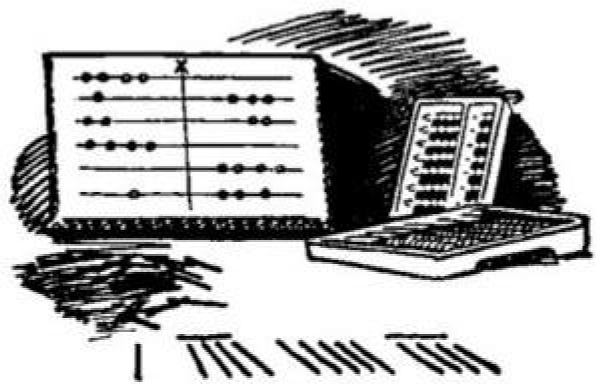
También es curiosa la voz groenlandesa: "del otro pie tres". Esto es, una abreviatura de la suma de los dedos de las manos, de los de un pie, y tres del otro pie. Veamos el sentido que tiene:

número de dedos en ambas manos	10
número de dedos en un pie	5
número de dedos del otro pie	3
Total	18

La voz completa para el número dieciocho sería: "todas mis manos, 3, mi mano", sin tomar en cuenta los dedos de los pies (es decir, 10 + 3 + 5).

Curiosidades Aritméticas:

100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 x 9
100 = 1 + 2 x 3 + 4 x 5 - 6 + 7 + 8 x 9
100 = 1 + 2 x 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9
100 = 1 x 2 + 34 + 56 + 7 - 8 + 9
Volver



Capítulo Segundo
El Abaco Antiguo y sus Descendientes.

Contenido:

1. El Rompecabezas de Chéjov
Ahora veremos un ameno problema aritmético, tal y como lo planteó el estudiante de séptimo año, Ziberov, del cuento de Chéjov "el Repetidor".
"Un comerciante compró 138 arshins (1 arshin = 80 cm) de tela negra y azul por 540 rublos. Me pregunto, ¿cuántos arshin compró de cada una, si la tela azul costaba 5 rublos por arshin, y la negra, 3 rublos?"
Con gran humor, Chéjov relata cómo trabajaron sobre este problema tanto el repetidor de 7º año como su alumno Pedrito, de 12 años, mientras éste no fue rescatado por su padre:
"Pedrito observó el problema y, sin decir una palabra, empezó a dividir 540 entre 138.
- ¿Para qué divide Ud.? ¡Deténgase! O... continúe... ¿Aparece un residuo? Aquí no puede haber residuo. ¡Permítame!
- Probablemente no se trate de un problema aritmético, pensó, y vio la respuesta: 75 y 63-. Hmm!, dividir 540 entre 5 + 3? no, no.
- Bien, ¡resuélvalo ya! - concluyó, ordenando a Pedrito.
- ¿Qué tanto piensas? Ese problema te quitará todo el tiempo - dijo a Pedrito su padre, Udodov. Se necesita ser tonto. Resuélvalo Ud. por esta vez, Egor Aliékseich.
Egor Aliékseich, coge el pizarrín y se dispone a resolverlo; tartamudea, enrojece. Palidece.
- Este problema debe ser algebraico – dijo -. Se puede resolver con ayuda de la *x* y de la *y*, Por otra parte, también así se puede resolver: Yo aquí he dividido...¿Comprende? Ahora es necesario restar. ¿Entiende?...o si no. . . Lo mejor será que me lo traiga resuelto mañana… Pienselo !
Pedrito sonrió. Udodov también sonrió. Ambos comprendían la confusión del maestro. El estudiante de VII grado se confundió aún más, y empezó a pasear de extremo a extremo de la habitación.
Al fin, Udodov dijo:
- Sin álgebra también se puede resolver - y agregó dirigiéndose hacia un ábaco- helo aquí, mire... Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser.

- Esto está hecho a nuestra manera… no científica".
Esta historia con el problema que había sembrado la confusión en el repetidor, plantea por sí misma tres nuevos problemas, a saber:

1. ¿Cómo hubiera el repetidor resuelto el problema algebraicamente?
2. ¿ Cómo debió haber resuelto el problema Pedrito ?
3. ¿Cómo se lo resolvió su padre a Pedrito con el ábaco, en forma "no científica"?

A las primeras dos cuestiones, podemos responder probablemente sin trabajo alguno. La tercera no es tan simple. Pero vayamos en orden.

1. El repetidor de séptimo año hablaba de resolver el problema "con la ayuda de la x y de la y", y decía que el problema debía ser "algebraico". Formar dos ecuaciones con dos incógnitas para el problema dado no es difícil; hela aquí:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 138 \\ 5x + 3y = 540 \end{array}\right]$$

donde x es el numero de arshins de tela azul, e y, el de tela negra.

2. Sin embargo se resuelve fácilmente, también, en forma aritmética. Suponiendo que toda la tela hubiera sido azul, los 138 arshins de tela azul hubieran costado 5 * 138 = 690 rublos; esto es, 690 - 590 = 150 rublos más del costo en la realidad. Para que el precio sea 150 rublos menor, basta considerar que la diferencia de precios entre un arshin de tela azul y uno de tela negra es de 5 - 3 = 2 rublos: dividiendo 150 entre 2, obtenemos 75 arshins de tela negra; restándolos de los 138 originales, obtenemos 138 - 75 = 63 arshins de tela azul. Así debió haber resuelto el problema Pedrito.

3. Queda aún la tercera pregunta: ¿Cómo resolvió el problema Udodov?
En el relato, se dice bien poco: "Utilizó el ábaco, y obtuvo 75 y 63, tal y como debía ser".
¿Cuáles son los métodos de resolución de un problema con la ayuda del ábaco?
El ábaco sirve para efectuar operaciones aritméticas tal y como se hace en el papel (fig. 13).
Udodov conocía muy bien el ábaco y pudo hacer las operaciones muy rápido, sin la ayuda del álgebra como quería el repetidor, ni "de la x y de la y". Veamos ahora las operaciones que el padre de Pedrito debió hacer en el ábaco.

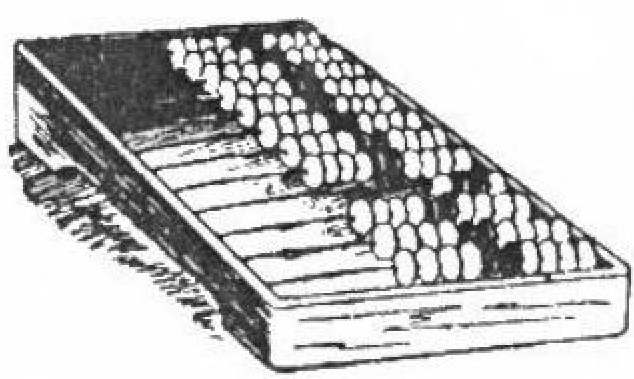


Figura 13. Abaco al estilo ruso.

La primera operación debió haber sido, como sabemos, multiplicar 138 por 5. Para eso, conforme a las reglas de las operaciones en el ábaco, primeramente multiplicó 138 por 5, es decir, simplemente movió el número 138 una hilera hacia arriba (ver la figura 14, a, b) y luego dividió este número entre dos, sobre el mismo ábaco. La división se empieza por abajo: se separan la mitad de bolitas colocadas en cada alambre; si el número de bolitas es impar en un alambre dado, se elimina la dificultad, "partiendo" una bolita de este alambre en 10 inferiores.

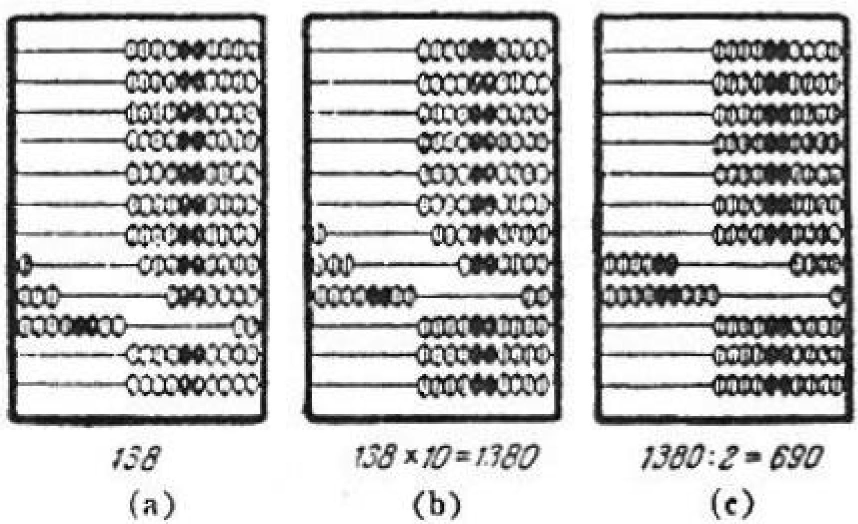


*Figura 14. Primero se muestra, en el ábaco, 138 * 10, es decir el número 138 (a), sometido a la operación (b), y luego se muestra el resultado anterior dividido entre dos (c)*

En nuestro caso, por ejemplo, 1380 se divide por la mitad en la forma siguiente: en el alambre inferior, donde existen 8 bolitas, se separan 4 bolitas (4 decenas), en el alambre intermedio de las 3 bolitas se separa 1, pero se conserva una, y la otra se substituye mentalmente por 10 inferiores y se dividen a la mitad, añadiendo o decenas a las bolitas inferiores; en el alambre superior se "parte" una bolita agregando 5 centenas a las bolitas del alambre intermedio. En consecuencia, en el alambre superior no hay bolitas, en el intermedio 1 + 5 = 6 centenas y en el inferior 4 + 5 = 9 (Fig. 14, c). En total 690 unidades. Todo esto se efectúa rápida y automáticamente.
Después, Udodov debió restar 540 de los 690. Sabemos cómo se hace en el ábaco.
Finalmente quedaba tan sólo dividir por la mitad la diferencia obtenían: 150; Udodov apartó 2 de las 5 bolitas (decenas), entregando 5 unidades a la fila inferior de bolitas; después de 1 bolita en el alambre de las centenas, entregó 5 decenas a la fila inferior: obtuvo 7 decenas y 5 unidades, es decir, 75.
Naturalmente, estas sencillas operaciones se efectúan más velozmente en el ábaco, que como aquí son descritas.
Volver

2. Cómo Calculaban en la Remota Antigüedad
Desde hace mucho tiempo, la gente ya sabía contar. Los dedos de las manos constituyeron el primer instrumento natural para contar. De ahí vino la idea de un sistema decimal de numeración en muchos pueblos antiguos. Debemos decir que las operaciones aritméticas con los dedos

sirvieron mucho tiempo como medio práctico para algunos pueblos, inclusive para los antiguos griegos. No debemos creer que con los dedos sólo se puede contar hasta diez. Por documentos de la literatura griega antigua que han llegado hasta nosotros, sabemos que ya en los siglos V y IV antes de nuestra era se habían desarrollado considerablemente las operaciones con los dedos cuyos resultados llegaban a miles.
Posteriormente, entre los egipcios, griegos, romanos y chinos, y en otros pueblos antiguos, aparece un aparato para calcular que, de acuerdo a su idea, recuerda nuestro ábaco. Su forma en distintos pueblos era diferente. Así, el ábaco griego era en sí, un tablero (mesa) con cuadro, dibujados (fig.15), en el cual se desplazaban fichas especiales que hacían el papel de las bolitas de los ábacos de nuestro tiempo. El ábaco romano tenía la forma de un tablero de cobre con canales (con cortes), en los que se desplazaban botones.

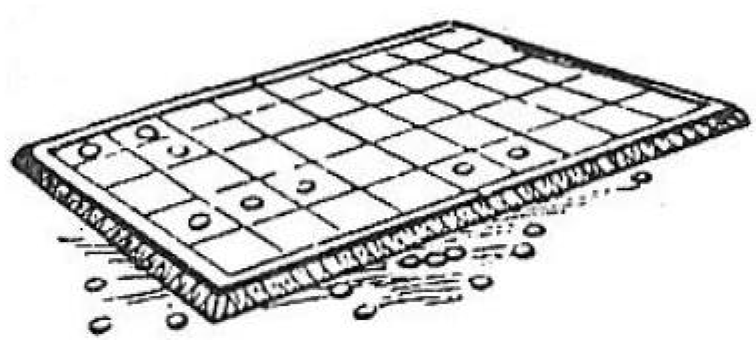


Figura 15. Tablero y fichas utilizadas para efectuar operaciones aritméticas, antes del aparato ábaco

En la antigua China, para la representación de los números en el tablero de cálculo, se empleaban palitos con una longitud de 10 cm. y un espesor de 1 cm. Ya cerca del año 150 de nuestra era, eran ampliamente conocidos en China los métodos para efectuar, en el tablero de calcular, las cuatro operaciones aritméticas.
Había dos maneras de representar las cifras en el tablero de operaciones chino. Ambas están reproducidas en la fig. 16.

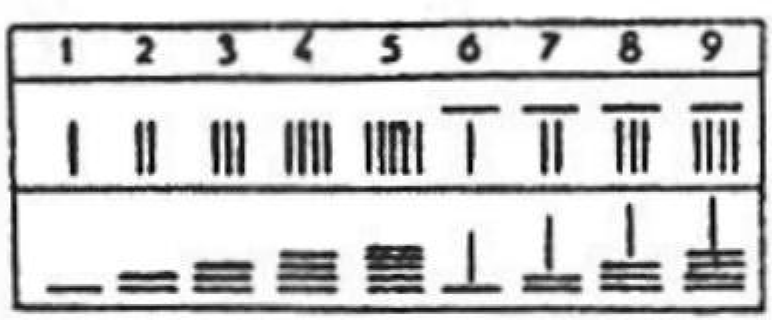


Figura 16. Dos métodos de formación de cifras, en la tabla de operaciones china

En la escritura de loa números en el tablero, se seguía el siguiente proceso: la primera cifra (leyendo de derecha a izquierda) se representaba por el primer método; la siguiente, por el segundo; la tercera cifra de nuevo se representaba por el primer método, y la cuarta por el segundo método, y así sucesivamente. En otras palabras, todas las cifras de un número, que ocupaban lugares impares (leyendo de derecha a izquierda), se representaban por el primer método, y aquellas que se encontraban en los lugares pares, eran representadas por el segundo método. Por ejemplo, los números 78639, 4576 y 1287 se representaban en el tablero de calcular como se ve en la fig. 17.

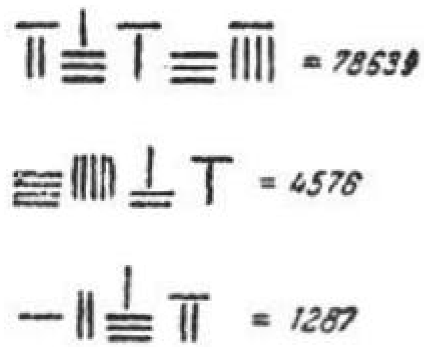
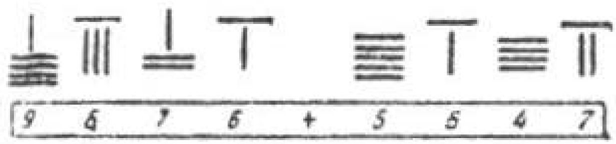


Figura 17. Ejemplos de construcción de algunos números en la tabla china de operaciones (o cálculos)

Ahora veremos cómo se llevaban a cabo, de acuerdo con este tablero de calcular, las operaciones de la adición, y de la multiplicación.

Adición. Consideremos que se desea hallar la suma de los dos números 9876 y 5647. Primeramente se les representa en el tablero de operaciones:

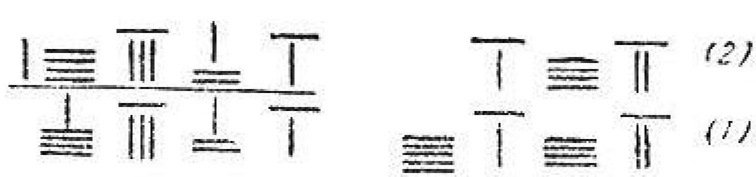


Cuadro 8

La adición se realizaba empezando con los órdenes superiores, es decir, desde la izquierda.
1er Paso: Sumemos los millares

$$9 + 5 = 14$$

Representamos esto así:



Cuadro 9

es decir. sobre los sumandos formamos un segundo renglón y a la izquierda, arriba de la cifra 9, escribimos 14 en tal forma, que la cifra 4 esté estrictamente arriba de la cifra 9, y parte restante del primer sumando la transcribimos sin modificaciones. Sobre el segundo sumando repetimos todas sus cifras, excepto la cifra 5 ya utilizada.

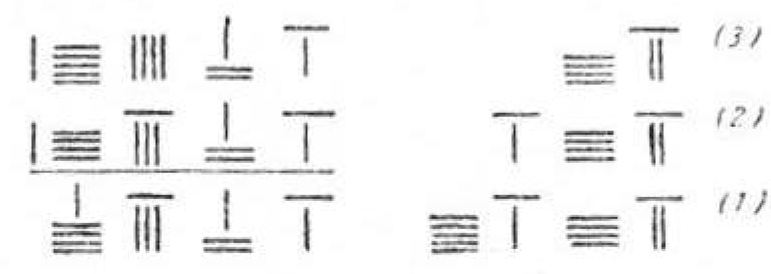
2do Paso: Sumemos las centenas

$$8 + 6 = 14$$

y puesto que obtenemos en la adición una unidad de mayor orden, la agregarnos a la suma anteriormente obtenida.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 4 \\ 1 & 4 & \\ \hline 1 & 5 & 4 \end{array}$$

así, el tercer renglón quedará (los primeros dos se repiten intactos)



Cuadro 10

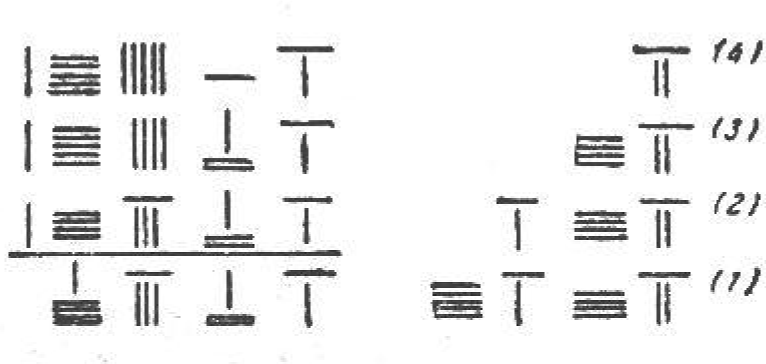
en el tercer renglón a la izquierda se escribe 154, y después se repiten las dos últimas cifras (76) del primer sumando: a la derecha están repetidas las dos últimas cifras (47) del segundo sumando (sus cifras restantes ya han sido utilizadas).
3er. Paso: Sumemos las decenas

$$7 + 4 = 11,$$

con lo que e1 siguiente resultado es

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & 4 & \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 1 \end{array}$$

el número 1551 se escribe a la izquierda, en el cuarto renglón:



Cuadro 11

4º Paso: ahora, falta solamente sumar las unidades

6 + 7 = 13

y la suma de los dos números dadas se determina : es igual a 15523:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 5 & 1 & \\ & & & 1 & 3 \\ \hline 1 & 5 & 5 & 2 & 3 \end{array}$$

el número 15523 obtenido, está escrito en el quinto renglón de la columna izquierda, y el esquema de la adición, finalmente, tiene el aspecto representado en la fig. 18

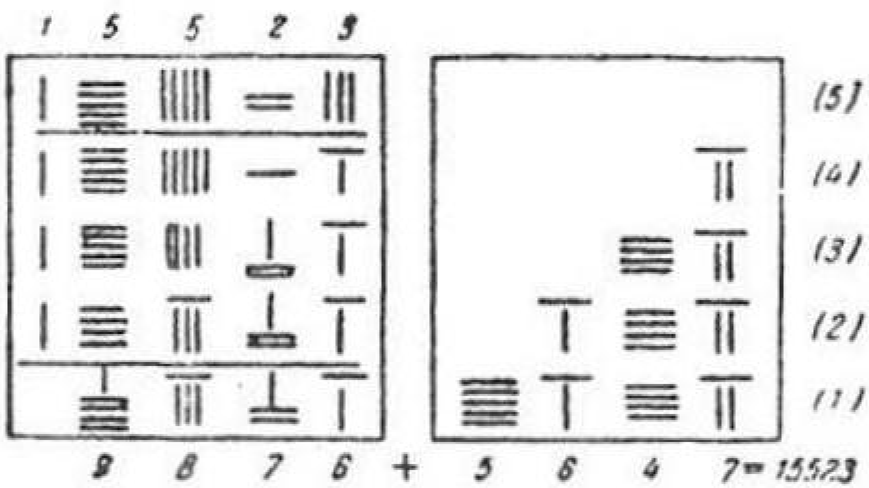


Figura 18. En este dibujo se representa la suma de dos números, 9876 y 5647, según el tablero chino de cálculo

Multiplicación. En el tablero de operaciones de la antigua China, la multiplicación se iniciaba con las cifras de orden superior, pasando gradualmente a las cifras de órdenes menores. Además, ya se empleaban las tablas de multiplicar.

Supongamos, a título de ejemplo, que se trata de multiplicar 346 por 27. El proceso de la multiplicación en la tabla de operaciones observado en nuestras notaciones, tomaba aproximadamente el siguiente aspecto:

3	4	6		
x	2	7		
	6			
	2	1		
		8		
		2	8	
		1	2	
			4	2
	9	3	4	2

Primeramente, multiplicamos 3 por 2 y obtenemos 6; es decir, la cifra del orden más alto del producto (número de millares). Después, multiplicamos, 3 por 7 y 4 por 2, obteniendo 21 y 8 centenas; los escribimos debajo de la cifra 6, considerando los órdenes, como está indicado. Luego, multiplicamos 4 por 7 y 6 por 2 (esto nos da los números de 28 y 12), y finalmente, multiplicamos 7 por 6 para obtener 42 unidades: sumando las anteriores cantidades, obtenemos 9342.

El tablero de calcular y los métodos de operar con él, se conservaron en China hasta el siglo XIII. En esta época se empezó a emplear el cero, el que con ayuda de los palitos de calcular se representaba en forma de cuadrado.

Entonces, ya se podían representar también las fracciones decimales en el tablero de calcular. Por ejemplo, los números 106 368 y 6312 se representaban aproximadamente como se muestra en la finura 19.

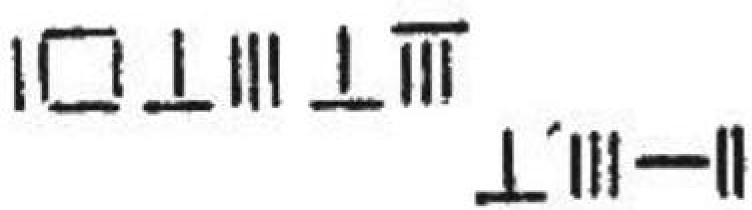


Figura 19. Ejemplo de construcciones en la tabla de operaciones china. La combinación de los números 106 368 y 6312

En el siglo XV, en China y Japón ya se empleaba, para las cuatro operaciones aritméticas, un ábaco de siete bolitas en cada alambre (llamado en China "suang-pang"[1], y en Japón "Soroban") (ver la fig. 20). Estos aparatos de calcular se han conservado hasta nuestros días y su empleo es muy popular.

[1] El ábaco suang pang se llegó a construir en miniaturas (17 mm. x 8 mm.), y también se construyeron de 6 bolitas de cinco de un lado y una del otro: el número de alambres, (o renglones) llegaba a 21.

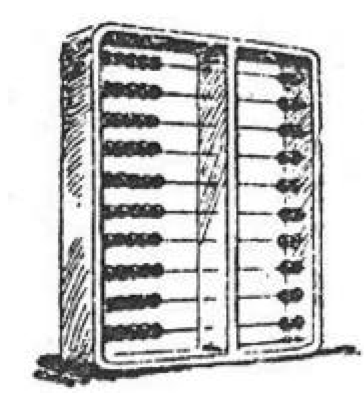


Figura 20. Abaco usado en China y Japón, con siete bolitas de marfil en cada alambre

He aquí por ejemplo, la opinión de un científico japonés: A pesar de su antigüedad, el sorobán supera a todos los aparatos de cálculo modernos, gracias a su facilidad de manejo, a lo simple del dispositivo y a su bajo costo.

El Abaco Ruso

Hay algunos objetos útiles que no valoramos lo suficiente debido a su constante manejo, lo que los ha convertido en objetos demasiado comunes de uso doméstico. Al grupo de tales objetos insuficientemente estimados pertenece nuestro ábaco: aparato de cálculo popular ruso que representa en sí, una modificación del famoso "ábaco" o "tablero de cálculo", de nuestros remotos antecesores.

Mientras tanto, Occidente casi no sabe acerca de los ábacos, y únicamente en las escuelas superiores existen enormes ábacos: Un medio práctico escolar en la enseñanza de la numeración.

Tenemos razón al enorgullecernos de nuestros ábaco de calcular, puesto que gracias a su dispositivo sorprendentemente sencillo, y con base en los resultados que pueden lograrse en ellos, pueden competir, en ciertos aspectos, inclusive con máquinas calculadoras. En unas manos hábiles, este sencillo aparato hace con facilidad, verdaderas maravillas. Un especialista que trabajó antes de la revolución en una gran firma rusa vendedora de maquinas calculadoras, me contó que en más de una ocasión tuvo oportunidad de observar la admiración que despertaban los ábacos ruso en extranjeros importadores de modelos de mecanismos calculadores complicados.

En vez de multiplicar por 7, multiplíquese el multiplicando por 10 y luego réstese el mismo tres veces.

La multiplicación por 8 da el mismo resultado que, restar el doble del multiplicando al producto de la multiplicación por diez.

Para multiplicar por 9, multiplíquese por diez y réstese el multiplicando.

Para multiplicar por 10, basta elevar todo el número un renglón.

El lector, probablemente ya por sí mismo, comprende cómo es necesario proceder en la multiplicación por números mayores de 10 y qué clase de substituciones resultan las más convenientes. Así, en vez de 11 se usará 10 + 1, en vez de 12, 10 + 2.

Consideremos algunos casos especiales para multiplicadores de la primera centena:

20 = 10 x 2	32 = 22 + 10
22 = 11 x 2	42 = 22 + 20
25 = (100:2):2	43 = 33 + 10

26 = 25 + 1 46 = 50 - 5
27 = 30 – 3 63 = 33 + 30 etc.

Como se ve, con ayuda de los ábacos es más sencilla la multiplicación por 22, 33, 44, 55, etc., que por otros números: por tal razón, es necesario tratar de aprovecharse, en la descomposición de los multiplicadores, de número, semejantes con idénticas cifran.
A método similares se recurre también en la multiplicación por números mayores que 110. Si tales métodos artificiales resultan agotadores, siempre podremos recurrir a multiplicar, con ayuda de los ábacos, conforme a una regla general que consiste en multiplicar cada cifra del multiplicador, y escribir los productos parciales. Esto, desde luego, proporciona una reducción de tiempo.

La División en el Abaco
Naturalmente, la división en el ábaco es más difícil que la multiplicación; para esto es necesario recordar una serie de métodos especiales, a veces bastante complicados. A quienes se interesen en ellos, les sugerimos, que consulten un manual especializado. Aquí indicamos sólo lo referente a un ejemplo de los métodos adecuados de la división por números de la primera decena (excepto el número 7, con el cual el método de división es demasiado complicado).
Sabernos ya cómo dividir entre 2 lo cual es muy simple.
El método de división entre 3 es más complicado y consiste en multiplicar por la fracción periódica infinita 0.3333... (se sabe que 0.333...=1/3). Sabemos multiplicar, con ayuda del ábaco, por 3; también podemos disminuir en 10 veces; así pues, es necesario solamente, trasladar el dividendo un alambre hacia abajo. Después de breves ejercicios, este método de división entre 3 a primera vista muy largo se muestra muy adecuado en la práctica.
La división entre 4, naturalmente, equivale a dividir 2 veces entre 2.
Más fácil aún es la división entre 5: basta duplicar, y dividir entre 10.
Entre 6, hay que seguir dos pasos: dividir entre 2, y luego entre 3
La división entre 7 es muy complicada con el ábaco, por lo que aquí no hablaremos de ella.
La división entre 8 equivale a dividir tres veces entre 2.
Es muy interesante la división entre 9. Sabemos que 1/9 = 0.11111... Está claro aquí que, en lugar de la división entre 9 se pueden sumar sucesivamente 0.1 del dividendo + 0.01 del mismo x 0.001 ... etc.[2]
Como se ve es muy fácil dividir entre 2, 10 y 5, y naturalmente entre sus números múltiplos 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Estos casos de la división, no representan obstáculo incluso para el que tiene poca experiencia en el manejo del ábaco.
Volver

3. Ecos de la Antigüedad
Cierto vestigios de la antigüedad, tanto en el lenguaje, como en las costumbres están relacionados con los más remotos antecesores de nuestros ábacos de calcular. Pocos sospechan, por ejemplo, el origen de lo que a veces hacemos "para la memoria" al anudar un pañuelo.
Con esto, repetimos lo que con sentido común hacían antiguamente nuestros antecesores, "escribiendo" sobre cordeles el total de un cálculo. Una serie de correas o cuerdas con nudos efectuados a lo largo de ella, representaba en sí un aparato de calcular (fig. 21) en principio, análogo al ábaco. Esto constituye el "ábaco de cuerda" peruano denominado “quipos”. Un nudo

[2] Este método es útil también para la división oral entre 9

hecho una sola vez sobre la cuerda, denotaba 10: dos veces, 100: tres veces 1000, y así sucesivamente.

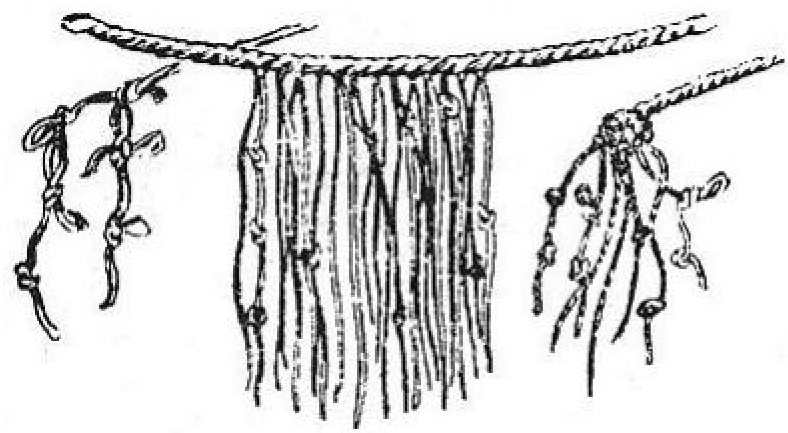


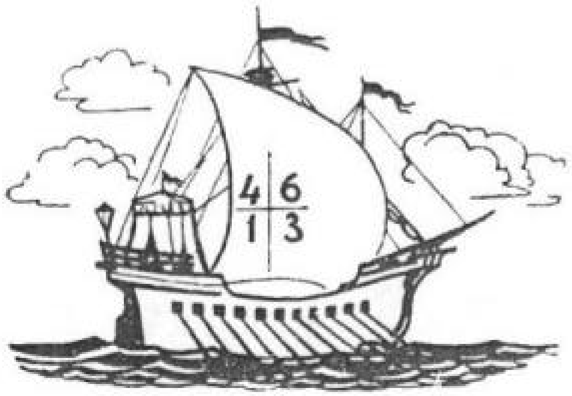
Figura 21. Aparatos de calcular usados por los antiguos peruanos, llamados "quipos"

Palabras como "banco" y "cheque" tan difundidas actualmente están relacionadas con el ábaco. En alemán "bank" significa banco, escaño, silla.
¿Qué hay de común entre la institución financiera 'bank" en el sentido moderno de la palabra y el banco o escaño?. Lo que aquí se señala, está lejos de ser una simple coincidencia de nombres. El ábaco en forma de banco tuvo una amplia difusión en los círculos comerciales de Alemania en los siglos XV y XVI; cada banco de cambio u oficina bancaria, se caracterizaba ante todo por la presencia de un "banco de contabilidad".
Una relación más indirecta con el ábaco, tiene la palabra "check" (cheque); es de origen inglés y procede del verbo "checker" (registrar, revisor) ; "checkered" (registrado, cotejado) se llamaba a una servilleta de cuero rayado, en forma de ábaco, que en los siglos XVI y XVII los comerciantes ingleses portaban consigo en forma enrollada, y en el caso que se necesitase efectuar cuentas, la desplegaban sobre una mesa. Las formas para los cálculos se rayaban según el modelo de esto, ábacos enrollados, y no es extraño que fuera transferido a ellas, en forma abreviada, el nombre de estos aparatos de calcular: de la palabra "checkered" se originó la palabra "check".
Es curioso que de aquí se haya originado la expresión "se quedó con un palmo de narices" la cual la aplicamos actualmente al hombre que ha perdido todo su dinero. Esto también se relaciona con la época en que todos los cálculos monetarios se realzaban sobre el ábaco, por medio de habichuelas que substituían a las cuentas de nuestros ábacos. En la abra "El Estado del Sol" de Campanella (1602) leemos: "Uno calcula con piedrecillas, el otro con habichuelas. Un hombre, habiendo perdido su dinero, se quedaba con unas habichuelas que representaban la suma de su pérdida: de aquí precisamente el correspondiente giro del lenguaje.
Volver

4. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9$$
$$100 = 12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89$$
$$100 = 123 + 4 - 5 + 67 - 89$$

Volver



Capítulo Tercero
Algo de Historia

Contenido:

1. "Las divisiones es un asunto difícil"

Hemos visto que la división en general es más complicada que la multiplicación y aunque ahora podemos resolverla con gran facilidad, no siempre fue así.
En la antigüedad se consideraba "sabio" a quien hacia correctamente y con rapidez las divisiones; cada "maestro en división" (algo así como especialista) debía comunicar a los demás el resultado de determinados casos de esta operación.
Algunas veces, encendiendo un cerillo con un movimiento habitual, todavía reflexionamos sobre cuánto trabajo costó a nuestro antecesores, inclusive no muy remoto, la obtención del fuego. Empero pocos sospechan que a los actuales métodos de realización de las operaciones aritméticas tampoco fueron, en su origen, así de sencillos y cómodos para que en forma tan rápida y directa condujeran al resultado.
Nuestros antepasados emplearon métodos mucho más lentos y engorrosos, y si un escolar del siglo XX pudiera trasladares tres o cuatro siglos atrás, sorprendería a nuestros antecesores por la rapidez y exactitud de sus cálculos aritméticos. El rumor acerca de él recorrería las escuelas y monasterios de los alrededores, eclipsando la gloria de los más hábiles contadores de esa época, y de todos lados llegarían gentes a aprender del nuevo gran maestro el arte de calcular.
Particularmente difíciles y complejas eran en la antigüedad las operaciones de la multiplicación y la división: esta última en mayor escala. "La multiplicación es mi martirio, y con la división es la desgracia" decían entonces. Pero aún no existía, como ahora, un método práctico elaborado para cada operación. Por el contrario, estaba en uso simultáneamente casi una docena de diferentes métodos de multiplicación y división con tales complicaciones que su firme memorización sobrepasaba a las posibilidades del hombre medio. Cada "maestro de la división" exaltaba su método particular al respecto.

En el libro de V. Belustino: "Cómo llegó la gente gradualmente a la aritmética actual" (1911), aparecen 27 métodos de multiplicación, y el autor advierte: "es muy posible que existan todavía métodos ocultos en lugares secretos de bibliotecas, diseminados fundamentalmente en colecciones manuscritas" : y todos estos métodos de multiplicación : "ajedrecístico o por organización", "por inclinamiento", "por partes", "por cruz pequeña", "por red", "al revés", "por rombo", "por triángulo", "por cubo o copa", "por diamante", y otros[1], así como todos los métodos de división, que tenían nombres no menos ingeniosos, competían uno con otro tanto en voluminosidad como en complejidad. Dichos métodos se asimilaban con gran trabajo y solamente después de una prolongada práctica. Inclusive se consideraba que para poder dominar la multiplicación y la división de números de varias cifras significativas con rapidez y exactitud, era necesario un talento natural especial, capacidad excepcional: sabiduría que para los hombres sencillos era inaccesible.
"Asunto difícil es la división"(dura cosa e la partida) decía un antiguo refrán italiano; acertado refrán si se toman en cuenta los agotadores métodos con que se realizaban entonces: no importa que estos métodos llevaran a veces nombres demasiado festivos: bajo ellos se ocultaba una larguísima serie de complicadas manipulaciones. Así, en el siglo XVI se consideraba el método más corto y cómodo el de división por "lancha o galera". El ilustre matemático italiano de esa época. Nicolás Tartaglia (siglo XVI), escribió en su extenso manual de aritmética lo siguiente respecto a dicho método:

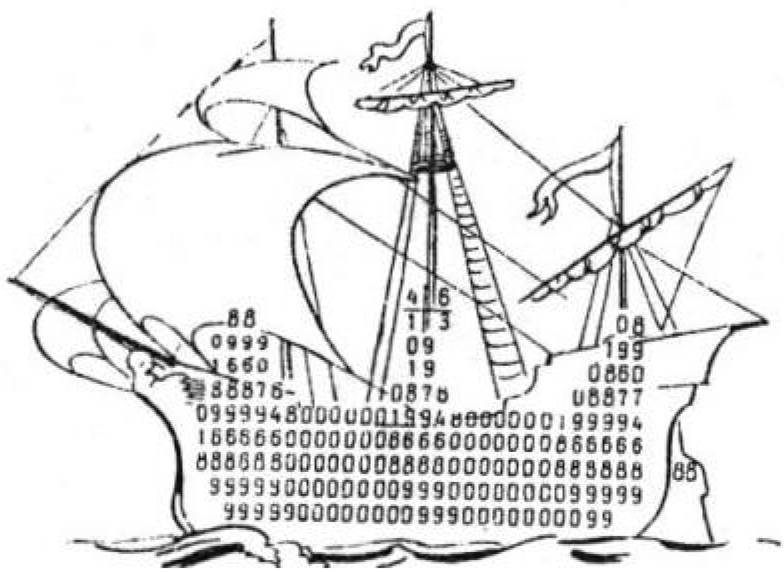


Figura 22. División de números a la manera antigua, por el método de "galera"

"El segundo método de división se llama en Venecia, por lancha o galera, debido a que en la división de ciertas clases de números se forma (ver fig. 22) una figura parecida a una lancha, y en la de otras, a una galera que a veces se obtiene tan bien terminada, que se muestra provista de todos sus elementos principales tales como popa y proa, mástil, velas y remos".
Esto parece muy divertido, pero aunque el antiguo matemático recomienda precisamente dicho método como "elegante, fácil, exacto, usual y el más general de los existentes, útil para la división de todos los números posibles", yo no me decido a desarrollarlo aquí por el temor de que hasta un

[1] Los ejemplos de multiplicación enunciados se especifican en la antigua "Aritmética" de Nicolas Tartaglia. Nuestro método moderno de la multiplicación se describe allí con el nombre de "ajedrecístico".

lector paciente cierre el libro en ese aburrido lugar y no lea más adelante. Sin embargo, este agotador método fue, efectivamente, el mejor en esa época.

Figura 23. Grabado de la "Aritmética" de Magnitski (editada en el año 1703). El dibujo representa el Templo de la Sabiduría. La Sabiduría está sentada en el trono de la Aritmética y en los escalones están los nombres de las operaciones aritméticas (división, multiplicación, sustracción, adición, cálculo). Las columnas son las ciencias en que la aritmética encuentra aplicación: geometría, estereometría, astronomía, óptica (conocimientos adquiridos por "vanidad"), mercatoria (es decir cartografía), geografía, fortificación, arquitectura (conocimientos adquiridos por "estudio"). Bajo las columnas dice, también en eslavo antiguo: "La Aritmética que se apoya en las columnas, lo abarca todo"

En Rusia, se usó hasta la mitad del siglo XVIII: entre los seis métodos que presenta León Magnitski[2] en su "Aritmética" (de los cuales ninguno es semejante al contemporáneo) el autor describe éste, y lo recomienda especialmente; a lo largo de su voluminoso libro (640 páginas de gran formato) Magnitski se sirve exclusivamente del "método de galera", no empleando, por otra parte, esta denominación.

Por último, mostramos al lector la siguiente "galera" numérica, aprovechando un ejemplo del mencionado libro de Tartaglia[3]:

---

[2] Antiguo manual ruso de matemática, que engloba todas sus ramas conocidas en esa época (incluyendo informaciones de astronomía náutica). Este es uno de los dos libros que Lomonósov denominó "las puertas de mi erudición".

[3] Los últimos dos nueves se agregan al divisor durante el proceso de la división.

```
                          4 | 6
                 88       1 | 3        08
               0999        09         199
               1660        19        0860
              88876      0876       08877
           09999480000001994800000199994
           16666600000086660000000866666
Dividendo — 88888800000008888000000888888
                                       (88 — Cociente
  Divisor(3) — 99999000000009990000000099999
               9999900000000999000000099
```

Cuadro 13

Llegando después, de múltiples trabajos al final de una operación aritmética, nuestros antecesores consideraron absolutamente necesario comprobar este total obtenido con el sudor de su frente, ya que los métodos voluminosos provocaron, como es lógico, desconfianza hacia sus resultados; es muy fácil perderse en un camino, lardo y sinuoso que en el recto camino de los métodos modernos. Naturalmente, de aquí surge la antigua costumbre de comprobar toda operación aritmética efectuada, encomiable regla que aún hoy se practica.

El método favorito de comprobación era el llamado "método del nueve", el cual frecuentemente se describe en algunos manuales contemporáneos de aritmética.

La comprobación por el nueve se basa en la "regla de los residuos" que dice: el residuo de la división de una suma entre cualquier número, es igual a la suma de los residuos de la división de cada sumado entre el mismo número. En la misma forma, el residuo de un producto es igual al producto de los residuos que al dividir entre 9 la suma de las cifras del mismo número. Por ejemplo, 758 entre 9 da como residuo 2: el mismo 2 se obtiene como residuo de la división de 7 + 5 + 8 entre 9.

Comparando ambas propiedades indicadas, llegamos al método de comprobación por nueve, es decir, por división entre 9. Mostraremos con un ejemplo en qué consiste dicho método[4].

Se desea comprobar la justeza de la adición de la siguiente columna:

38932	7
1096	7
+ 4710043	1
589106	2
5339177	8

Realicemos la suma de las cifras de cada sumando y al mismo tiempo, en los números de dos cifras obtenidas, sumemos también las cifras (esto se hace en el proceso mismo de adición de las cifras de cada sumando), hasta obtener en el resultado final un número de una cifra. Estos resultados (residuos de la división entre nueve), los escribimos como se indica en el ejemplo, al lado del correspondiente sumando. A1 sumar todos los residuos (7 + 7 + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8), obtenemos 8. Igual deberá ser la suma de las cifras del total (5339177) si la operación está efectuada correctamente: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7, después de todas las simplificaciones resulta igual a 8.

[4] Se aclara en forma apropiada en la deducción de la prueba de divisibilidad entre 9.

La comprobación de la substracción se realiza en la misma forma si se considera al minuendo como suma, y al substraendo y la diferencia como sumandos. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 6913 \\ \underline{-\ 2587} \\ 4326 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{-\ 4} \\ 6 \end{array}$$

$$4 + 6 = 10;\ 1 + 0 = 0$$

Este método es en especial conveniente si se aplica para comprobar la operación de multiplicación, como lo vemos en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 8713 \\ \underline{\times\ 264} \\ 34852 \\ 52278 \\ \underline{17426} \\ 2300232 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{\times\ 3} \\ 3 \end{array}$$

Si en tal comprobación fuera descubierto un error del resultado, entonces, para determinar precisamente dónde tiene lugar dicho error, se puede verificar por el método del nueve cada producto parcial por separado; y si el error no se encuentra aquí, queda solamente comprobar la adición de los productos parciales.

¿Cómo se puede comprobar la división conforme a este método?. Si tenemos el caso de una división sin residuo, el dividendo se considera como el producto del divisor por el cociente. En el caso de una división con residuos se aprovecha la circunstancia de que dividendo = divisor x cociente + residuo.

Por ejemplo:

$$\text{suma de cifras:}\quad \underbrace{16201387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8}\ ;\ \text{residuo}\ \underbrace{192}_{3}$$

$$2 \times 8 + 3 = 19;\quad 1 + 9 = 10;\quad 1 + 0 = 1$$

Cuadro 14

De la "Aritmética" de Magnitski cito una disposición conveniente para la comprobación por el nueve:

Para la Multiplicación:

$$\begin{array}{rr} 365 & 5 \\ \underline{\times\, 24} & \underline{\times\, 6} \\ 1460 & 30 \\ \underline{730\ \ } & \\ 8760 & \end{array}$$

Para la División

- del cociente 8
- del dividendo 1
- del divisor 2
- del residuo 3

$$2 \times 8 + 3 = 19$$
$$1 + 9 = 10$$
$$1 + 0 = 1$$

Semejante comprobación de las operaciones sin duda no deja que desear en cuanto a rapidez y como comodidad. Pero en lo referente a su seguridad, no es posible señalar lo mismo: el error no es, inevitable en dicho comprobación. En efecto, una y la misma suma de cifras puede tener diferentes números; no solamente la disposición de las cifras, sino algunas veces también la substitución de unas cifras por otras quedan encubierta en dicha comprobación. Escapan también al control los ceros y nueves superfluos, porque ellos no influyen sobre la suma de las cifras. Nuestros antecesores reconocían lo anterior, y no se limitaban a una sola comprobación por medio del nueve, sino que efectuaban inclusive una comprobación complementaria por medio del siete. Este método está basado en la "regla de los residuos", pero no ea tan conveniente como el método del nueve, porque la división entre 7 se tiene que efectuar completamente, para así hallar los residuos (y además son polos errores, en la, operaciones del propio método).
Las dos comprobaciones, por nueve y por siete--, resultan ya un control mucho más seguro: lo que escapa a una, será captado por la otra. El error queda oculto solamente en el caso de que la diferencia entre el resultado verdadero y el obtenido sea el número 7 x 9 = 63 o uno de sus múltiplos. Puesto que semejante casualidad siempre es posible, tampoco la doble verificación proporciona una seguridad total en la veracidad del resultado.
Además, para cálculos ordinarios, donde se yerra frecuentemente en 1 ó 2 unidades, basta con la comprobación por el nueve. La verificación complementaria del siete es demasiado abrumadora. Tengamos en cuenta que solamente es bueno aquel control que no obstaculiza el trabajo.
Sin embargo, efectuando un cálculo importante se procura, con objeto de tener seguridad, realizar una doble corrección, para lo cual, en lugar del divisor 7 es mejor hacer uso del divisor 11. Además, la cuestión se puede simplificar en gran medida, aplicando la siguiente prueba conveniente de la divisibilidad entre 11: el número se descompone en partes, de derecha a izquierda, cada una con dos cifras (la parte izquierda extrema puede incluir sólo una cifra) ; las partes se suman y la suma obtenida será "congruente" con el número examinado conforme al divisor 11: la suma de las partes da en la división entre 11, el mismo residuo que el número examinado.

Aclaremos lo indicado con un ejemplo. Se desea hallar el residuo de la división 24716 entre 11. Descompongamos el número en partes y sumémoslas:

$$2 + 47 + 16 = 65$$

Puesto que 65 en la división entre 11 como residuo da 10, también el número 24716, en la división entre 11, da el mismo residuo. La fundamentación de este método se proporciona en mi libro "Matemáticas Recreativas".
Yo propongo este método porque, simultáneamente, da justo el número congruente con el examinado, también conforme al divisor 9. De esta manera, tenemos la posibilidad de realizar en forma conveniente la comprobación por medio de dos divisores: 9 y 11. A tal comprobación puede escapar solamente un error, múltiple de 99, lo que lo hace muy poco probable.
Volver

2. ¿Multiplicamos Bien?
Los antiguos métodos de multiplicación eran torpes e inadecuados, ¿pero acaso es tan bueno nuestro actual método como para que ya no le sea posible ninguna clase
le mejora posterior? No cabe duda que nuestro método no es perfecto; se pueden inventar todavía más rápidos o aun más seguros. De varias mejoras propuestas indique en tanto, sólo una que aumenta, no la rapidez de la realización de la operación, sino su seguridad; consiste en que, teniendo un multiplicador de varias cifras, se comienza la multiplicación triplicación no con la última cifra, sino con la primera cifra del multiplicador. La multiplicación 8713 × 264, efectuada anteriormente, además adopta la forma:

$$\begin{array}{r}
8713\\
\underline{\times\, 264}\\
17426\\
52278\\
\underline{34852}\\
2300232
\end{array}$$

Como vemos, la última cifra de cada producto parcial se escribe debajo de aquella cifra del multiplicador, por la cual se multiplica.
La ventaja de semejante disposición consiste en que las primeras cifras de los productos parciales , que determinan las cifras más importantes del resultado, se obtienen al principio de la operación, cuando la atención todavía no se pierde y, por consiguiente disminuye la probabilidad de cometer un error. (Además, este método simplifica la aplicación de la llamada multiplicación "abreviada", sobre la cual no podemos extendernos).
Volver

3. Método Ruso de Multiplicación
No se pueden realizar multiplicaciones de números de varias cifras, así sean de dos cifras, si no se recuerdan de memoria todos los resultados de la multiplicación de los dígitos, es decir, lo que es la tabla de multiplicación. En la antigua "Aritmética" de Magnitski, que ya hemos mencionado, la

necesidad de un conocimiento sólido de la tabla de multiplicación está expresada en los versos (extraños para el oído moderno) siguientes[5]:

Aún no ha existido quien,
ignorando las tablas de multiplicación,
quede exento de tropiezos
que finalmente lo derroten
en todas las ciencias.
Y aún más, sí habiéndolas
aprendido las olvida,
no habrá obtenido ningún beneficio.

El autor de estos versos, evidentemente, no sabía o no tomaba en consideración que existe un método de multiplicar números en que no es necesario el conocimiento de la tabla de multiplicar. Este método, que no es semejante a nuestros métodos escolares, fue heredado y empleado corrientemente por el pueblo ruso desde la remota antigüedad. Fundamentalmente consiste en que la multiplicación de dos números cualesquiera, lleva a una serie de divisiones consecutivas de un número por la mitad y, a un duplicamiento del otro número. He aquí un ejemplo:

$$\begin{aligned} 32 &\times 113 \\ 16 &\times 26 \\ 8 &\times 52 \\ 4 &\times 104 \\ 2 &\times 208 \\ 1 &\times 416 \end{aligned}$$

La división por la mitad se prosigue hasta que en el cociente se obtenga 1, duplicando paralelamente el otro número. El número último duplicado da precisamente el resultado buscado. No es difícil comprender sobre qué está basado este método: el producto no varia si uno de los factores disminuye a la mitad, y el otro aumenta al doble. Es claro, por tal razón, que en el resultado de la repetición múltiple de esta operación se obtiene el producto buscado:

$$32 \text{ x } 13 = 1 \text{ x } 416$$

Sin embargo ¿cómo proceder cuando se requiera dividir un número impar por la mitad?
El método popular fácilmente sale de esta dificultad.
La regla dice que es necesario, en el caso de un número impar, restarle una unidad y dividir el resto por la mitad; pero en compensación, será necesario sumar el último número de la columna derecha, con todos los números de dicha columna que se hallan en el mismo renglón de un número impar de la columna izquierda: esta suma nos dará el producto buscado. Cuando se lleva a la práctica este método, se acostumbra tachar todos los renglones con números pares a la izquierda, quedando únicamente los renglones que contienen un número impar a la izquierda. Proporcionemos un ejemplo:

[5] Los aludidos verso, se encuentran escritos en ruso antiguo por lo que, para dar al lector una clara idea de su contenido se ha hecho de ellos una traducción libre y equivalente, guardando fidelidad a la idea que expresan.

$$
\begin{array}{r}
19 \times 17 \\
9 \times 34 \\
\cancel{4 \times 68} \\
\cancel{2 \times 136} \\
1 \times 272
\end{array}
$$

Sumando los números no tachados, obtenemos el resultado preciso:

$$17 + 34 + 272 = 323.$$

¿En qué está fundado este método?
La justeza del método se torna evidente, si se toma en cuenta que

$$19 \times 17 = (18 + 1) \times 17 = 18 \times 17 + 17,$$
$$9 \times 34 = (8 + 1) \times 34 = 8 \times 34 + 34, \text{etc.}$$

Es claro que los números 17, 34, etc., perdidos en la división del número impar por la mitad, se necesitan, sumar al resultado de la última multiplicación, para obtener el producto.
Volver

4. Del País de las Pirámides

Es muy probable que el método anteriormente descrito llegará hasta nosotros desde la más remota antigüedad y de un lejano país: Egipto. Poco sabemos acerca de cómo realizaban las operaciones aritméticas los habitantes del antiguo país de las pirámides, pero se conserva un interesante documento: un papiro donde están escritos ejercicios aritméticos de un alumno de una de las escuelas de agrimensura del Egipto antiguo; es el llamado "Papiro de Rhind que pertenece a una época entre los años 2000 y 1700 antes de nuestra era[6], y que representa, en si, una copia de un manuscrito todavía más antiguo, transcrito por un tal Ajmes. El escriba[7] Ajmes, al encontrar "el cuaderno del escolar" de esta lejanísima época, transcribió cuidadosamente todos los ejercicios aritméticos del futuro agrimensor, incluyendo sus errores y las correciones del profesor, y dió a su copia un título solemne, que ha llegado hasta nosotros en la siguiente forma incompleta:
Precepto para, cómo alcanzar el conocimiento de todas las cosas desconocidas ... de todos los secretos ocultos en las cosas.
Elaborado por el escriba Ajmes durante la época del faraón Ra, para uso del Alto y Bajo Egipto, conforme a los cánones de las obras antiguas del tiempo del faraón "Ra - en - mata ".

El papiro de Rhind terminaba con consejos muy originales:
"Cazadores de reptiles y ratones, hagan fuego contra la mala yerba; cobren abundantes presas. Rueguen al Dios Ra del calor, del viento y de la alta agua".

[6] El papiro, encerrado en un estuche metálico, Fue encontrado por el egiptólogo inglés Henry Rhind. En formar desplegada tiene 20 m. de longitud y 30cm. de ancho. Se conserva en el Museo Británico, en Londres.
[7] El título "escriba" pertenecía a la tercera clase de los sacerdotes egipcios; en su administración se encontraba "todo lo referente a la parte constructiva de un templo y a su propiedad agraria". Su especialidad principal, la constituían los conocimientos matemáticos, astronómicos y geográficos (V Bobynin).

Uno de los papiros matemáticos egipcios se encuentra en Moscú, en el Museo de Bellas Artes A. S. Pushkin. El académico B. A. Turaiev lo empezó a descifrar en 1914, tarea concluida por el académico V. V. Struve en el año 1927.

En el, papiro de Rhind, ese interesante documento que ha perdurado cerca de 40 siglos, y que testimonia sobre una antigüedad aún más, remota, encontramos cuatro ejemplos de multiplicación efectuados conforme a un método que hace recordar vivamente al método popular ruso. He aquí estos ejemplos (los puntos delante de los números simbolizan el número de unidades del multiplicador; con el signo +, señalamos los números que están sujetos a la adición):

(8×8)
. 8
.. 16
.... 32
:::: 64

(9×9)
. 9 +
.. 18
.... 36
:::: 72 +
Total 81

(8×365)
. 365
.. 730
.... 1460
:::: 2920

(7×2801)
. 2801 +
.. 5602 +
.... 11201 +
Total 19607

Como se ve de estos ejemplos, ya varios milenios antes de nuestra era, los egipcios empleaban un método de multiplicación muy semejante al popular ruso (fig. 24), y que por caminos desconocidos fue trasladado del antiguo país de las pirámides a la época moderna.

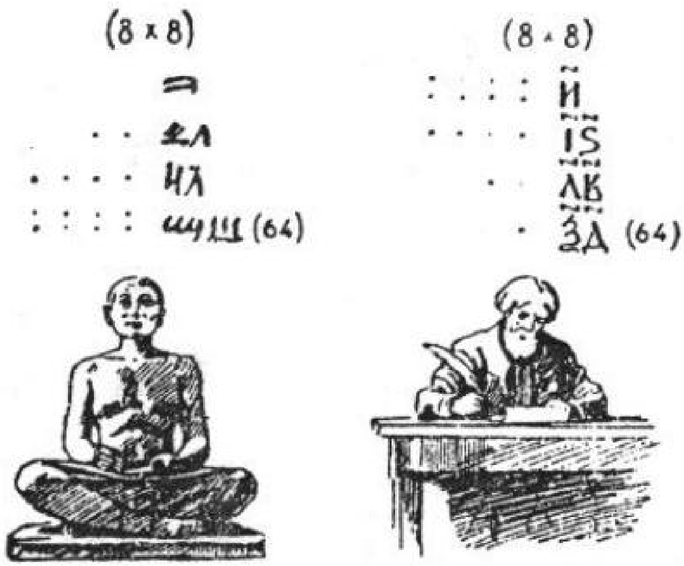


Figura 24. El razonamiento de las operaciones aritméticas llegó a Rusia del antiguo Egipto

Si a un habitante de la tierra de los faraones se le propusiera multiplicar, por ejemplo. 19×17, efectuaría estas operación en la siguiente forma: escribiría una serie de duplicaciones sucesivas del número 17:

$$
\begin{array}{rl}
1 \rightarrow 17 & + \\
2 \rightarrow 34 & + \\
4 \rightarrow 68 & \\
8 \rightarrow 136 & \\
16 \rightarrow 272 & +
\end{array}
$$

y después sumaría los números que están seguidos por el signo +, es decir, 17 + 34 + 272. Obtendría, finalmente el resultado correcto: 17 + (2 x 17) + (16 x 17) = 19 x 17. Es fácil ver que semejante método, en esencia, es muy afín al popular ruso (la substitución de la multiplicación por una serie de duplicaciones sucesivas).

Es difícil decir si alguno de nuestros campesinos participaron en el traspaso de este antiguo método de multiplicación; los autores ingleses lo denominan precisamente "método campesino ruso"; en Alemania, en alguna parte, aunque los campesinos se aprovechan de él, sin embargo lo llaman "ruso".

Sería sumamente interesante obtener, por parte de los lectores, informaciones sobre lugares donde se emplea hoy día este antiguo método de multiplicación que ha tenido tan largo y original pasado.

En general, se ha seguido con gran atención lo referente a la matemática popular: penetrar en los métodos de cálculo y de medición empleados por el pueblo, recopilar y registrar estas memorias de la creación matemática popular, que han llegado hasta nuestra época desde las profundidades de la más remota antigüedad.

Sobre esto, hace tiempo, llamó la atención el historiador de la matemática, V. V. Bobynin, quien inclusive propuso un breve programa de recopilación de las memorias de la matemática popular. Quizás no esté de más proporcionar aquí la enumeración por él compuesta, para saber con precisión lo que conviene recopilar y registrar:

1. Numeración y cálculo.
2. Métodos de medida y de peso.
3. Conocimientos geométricos y sus expresiones en las edificaciones y ornamentos.
4. Métodos de agrimensora.
5. Problemas populares.
6. Proverbios, enigmas, y en general, producciones de la filología popular que tienen, relación con los conocimientos matemáticos.
7. Memorias de la matemática popular antigua, que se encuentran en manuscritos, museos, colecciones, o hallados en excavaciones de túmulos, tumbas o vestigios de una ciudad.

En resumen, proporcionó una breve información acerca de cuándo aparecieron por vez primera los signos, ahora generalmente empleados, de las operaciones aritméticas, la notación de la fracción, del exponente etc:

+ y –	en los manuscritos de Leonardo da Vinci (1452-1519)
×	en la obra de Guillermo Oughtred (1631)
. y :	en la obra de Godofredo W. Leibniz (1046-1716)
a/b	en la obra de Leonardo Pisano (Fibonacci) (1202)
an	en la obra de Nicolás Chuquet (1484)
=	en la obra de Roberto Recorde (1557)
> y <	en la obra de Tomás Harriot (1631)
() y []	en la obra de Alberto Girard (1629)

Si el lector está interesado en profundizar sobre la historia de la aritmética, conviene que consulte el libro de V. Belustino "Cómo llegó la gente gradualmente hasta la aritmética actual" (1914), que puede ser encontrado en las bibliotecas o librerías de libros antiguos.

5. Curiosidades Aritméticas

$$100 = 123 + 45 - 67 + 8 - 9$$
$$100 = 123 - 45 - 67 + 89$$
$$100 = (1 + 2 - 3 - 4) \times (5 - 6 - 7 - 8 - 9)$$

Volver

Capítulo Cuarto
SISTEMAS NO-DECIMALES DE NUMERACION

Contenido:

1. Autobiografía enigmática

Me permito iniciar este capítulo con un problema que yo imaginé hace tiempo para los lectores de una antigua revista de gran difusión[1], en calidad de "problema con premio". Helo aquí:

En los papeles de un matemático original fue hallada su autobiografía. Esta empezaba con las siguientes líneas:
"Acabé el curso de la universidad a los 44 años de edad. Pasó un año y siendo un joven de 100 años, me casé con una muchacha de 34 años".
"La insignificante diferencia de edades, sólo 11 años- que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 10 niños. Yo obtenía en total, al mes, 200 rublos, de los cuales, 1/10 parte se consagraba a mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 130 rublos al mes", y así sucesivamente.

¿Qué aclara las extraña contradicciones en los números de este fragmento?
La resolución del problema se sugiere por el nombre de este capítulo: un sistema no decimal de numeración; he aquí la causa singular, de las aparentes contradicciones de los números citados. Procediendo sobre la base de este pensamiento, no es difícil darse cuenta del sistema de numeración en que están representados los números del original matemático. El secreto se releva por la frase: "después de un año (luego de los 44 años de edad) como un hombre joven de 100 años"...; si a partir de la adición de una unidad el número 44 se transforma en 100, significa que la cifra 4 es la mayor en este sistema (como el 9 lo es en el decimal), y por consiguiente, la base del sistema es el 5. Al excéntrico matemático se le ocurrió la fantasía de escribir todos los números de su biografía en el sistema quinario[2] de numeración, es decir, aquel en el cual la unidad de un orden superior no es 10 veces, sino 5 veces mayor que la unidad de un orden inmediato inferior: en el primer lugar de la derecha se hallan, en él, las unidades simples (no mayores que el cuatro), en el segundo, no las decenas, sino las "quinarias"; en el tercero no las centenas, sino las "vigesimoquinarias" y así sucesivamente. Por tal razón, el número "44" representado en el texto de la escritura denota, no 4 x 10 + 4, como en el sistema decimal sino 4 x 5 + 4, es decir, veinticuatro. En la misma forma, el número "100" en la autobiografía representa una unidad de tercer orden en el sistema quinario, es decir, 25. Los restantes números de la escritura denotan correspondientemente[3]:

[1] "La naturaleza y los hombres".
[2] El sistema quinario de numeración tiene cinco cifras básicas (0,1,2,3, y 4) y se caracteriza porque el número 5 es ya un número de dos cifras, que se representa por, la unidad en el orden de las "quinarias" y, el cero en el orden de las unidades, (N. del T.)
[3] De aquí en adelante, los números escritos en un sistema no decimal de numeración se ponen entre comillas.

"34"	$= 3 \times 5 + 4$	= 19
"11"	= 5 + 1	= 6
“200”	$= 2 \times 25$	= 50
“10”	= 5	= 5
“1/10”	= 1/5	= 1/5
“1.130”	= 25 + 3 * 5	= 40

Restituyendo el significado verdadero de los números de la escritura, vemos que en ellos no existen contradicciones de ningún tipo.
"Acabé mis estudios en la universidad a los 24 años. Después de un año, siendo un joven de 25 años, me casé con una muchacha de 19 años. La insignificante diferencia de edades, 6 años, que había entre nosotros, hacía que tuviéramos sueños y aspiraciones comunes. Después de algunos años, ya tenía yo una pequeña familia de 5 niños. De salario percibía en total, al mes, 50 rublos, de los cuales 1/5 parte la empleaba mi hermana, por lo que nosotros y los niños vivíamos con 40 rublos al mes".

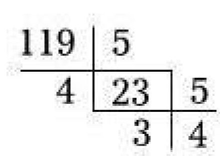
¿Es difícil representar los números en otros sistemas de numeración? En absoluto. Supongamos que se desea representar el número 119 en el sistema quinario. Se divide 119 entre 5, para saber cuántas unidades de primer orden caben en él:

119 : 5 = 23, residuo 4.

Lo que significa que el número de unidades simples será 4. Además, 23 "quinarias" no pueden estar totalmente en el segundo orden, puesto que la cifra mayor en el sistema quinario es el cuatro, y unidades más grandes que cuatro no pueden existir en un solo orden. Luego, dividamos 23 entre 5:

23 : 5 = 4, residuo 3.

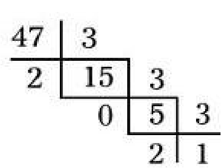
Esto muestra que en el segundo orden ("de los cincos") estará la cifra 3, y en el tercero ("de los veinticincos") el 4.
Así, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, o, en el sistema quinario "434".
Las operaciones realizadas, para comodidad, se disponen en la forma siguiente:



Cuadro 16

Las cifras en negritas (en la escritura se las puede subrayar) se escriben de derecha a izquierda y, simultáneamente, se obtiene la representación buscada, del número en otro sistema.
Pongamos aún otros ejemplos:

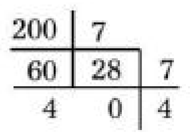
Ejemplo 1: Representar 47 en el sistema ternario.
Resolución:



Cuadro 17

Respuesta: "1202".
Verificación: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.

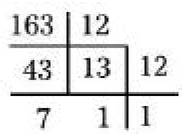
Ejemplo 2: Representar 200 en el sistema septenario.
Resolución:



Cuadro 18

Respuesta: "404".
Verificación: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$,

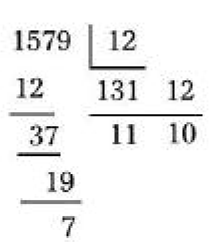
Ejemplo 3: Representar el número 163 en el sistema duodecimal:
Resolución:



Cuadro 19

Respuesta: "117".
Verificación: $1 \times 144 + 1 \times 12 + 7 = 163$.

Ahora el lector no tiene dificultad en representar cualquier número en un sistema de numeración deseado. El único obstáculo puede surgir, solamente, a consecuencia de que en ciertos casos no se encontraran notaciones para las cifras. En efecto, en la representación de números en sistemas con una base mayor que diez, por ejemplo, en el duodecimal puede presentar la necesidad en las cifras "diez" y "once". Fácilmente se sale de esta dificultad eligiendo, para las nuevas cifras, cualesquiera signos o letras condicionales, por ejemplo, las letras K y L que se hallan en los lugares 10° y 11° en el alfabeto ruso[4]. Así, el número 1579 en el sistema duodecimal[5] se representa en la forma siguiente:



Cuadro 20

Respuesta: "(10) (11)7", o IJ7 (según el alfabeto castellano).
Verificación: $10 \times 149 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

* * *

[4] En el alfabeto español, los lugares 10º y 11º estás ocupados por las letras I y J. (N. del T.)
[5] En el sistema duodecimal las cifras básicas con: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, 10 y 11. Por lo tanto, es necesario introducir dos nuevos símbolos para denotar las "cifras" diez y once. (N. del T).

Problema 1: Escribir el número 1926 en el sistema duodecimal.[6]
Problema 2: Escribir el número 273 en el sistema duodecimal.
Volver

2. El sistema de numeración más sencillo.
Sin trabajo podemos notar que, en cada sistema, la mayor cifra que se utiliza es menor en una unidad que el número base del sistema. Así, en el sistema decimal, la mayor cifra es el 9; en el de base 6, el 5; en el ternario, el 2; en el de base l5, el 14, etc.
El sistema de numeración más sencillo es, naturalmente, aquel para el cual se requiere el menor número de cifras. En el sistema decimal son necesarias 10 cifras (considerando, también, al cero), en el quinario, 5 cifras, en e1 ternario, 3 cifras (0, 1 y 2), en el binario únicamente 2 cifras (1 y 0). ¿Existe un sistema "unitario"? Naturalmente: este sistema es aquel en el cual las unidades de todos los órdenes tienen idéntico valor. Este mismo "sistema" rudimentario lo empleaba el hombre primitivo, efectuando cortes en un árbol de acuerdo a1 número de objetos contados. Pero entre él y todos los otros sistemas de cálculo existe una enorme diferencia: carece de la principal ventaja de nuestra numeración (el llamado, valor posicional de las cifras). En efecto, en el sistema "unitario" un signo que se halle en el 3° ó 5° lugares, tiene el mismo valor que el que se encuentre en el primer lugar. Mientras que, aún en el sistema binario, la unidad en el 3er, lugar (desde la derecha) es ya 4 (2×2) veces mayor que en el 1er. lugar, y en el 5° lugar, 16 veces ($2 \times 2 \times 2 \times 2$) mayor. Para la representación de cualquier número en el sistema "unitario" son necesarios exactamente tantos signos, como objetos sean contados: para escribir cien objetos, son necesarios cien signos: en el binario solamente siete ("1100100"); en el quinario, en total, tres ("400").
Es por esto que al sistema "unitario" es muy dudoso que se le pueda llamar "sistema"; por lo menos, no se le puede colocar junto a los restantes, puesto que se distingue fundamentalmente de ellos, en que no proporciona ninguna economía en la representación de los números. Si se le hace a un lado, entonces el sistema más sencillo de numeración resulta ser el sistema binario, en el que se emplean, en total, dos cifras: 1 y 0. ¡Por medio de la unidad y del cero se puede representar todo un conjunto infinito de números!
Para una numeración escrita y fija, este sistema es poco conveniente: se obtienen números excesivamente largos[7]. El sistema binario es muy a adecuado en una serie de investigaciones teóricas. En los últimos tiempos el papel del sistema binario ha tornado gran preponderancia, puesto que se halla en la base de la producción de cálculo, en las máquinas computadoras electrónicas. Dicho sistema posee ciertas interesantes particularidades inherentes que a propósito, se pueden emplear para la realización de una serie de trucos matemáticos efectivos, sobre los cuales hablaremos detalladamente en el capítulo "Trucos sin engaño".
Nos hemos habituado a tal grado a las operaciones aritméticas, que las efectuamos automáticamente, casi sin reflexionar en lo que hacemos. Pero las mismas operaciones exigen de nosotros gran esfuerzo si deseamos aplicarlas a números escritos en un sistema no decimal. Probemos, por ejemplo, efectuar la adición de los dos siguientes números, escritas conforme al sistema quinario.

$$\begin{array}{r} \text{"4203"} \\ +\text{"2132"} \\ \hline \end{array}$$

[6] Las respuestas a los problemas están al final del libro. E indica: Resultado Problema 1: "1146"; Resultado Problema 2: "1109"
[7] En cambio como veremos después para tal sistema se simplifican al máximo las tablas de adición, de multiplicación.

Sumemos conforme a los órdenes, empezando con las unidades, es decir, de la derecha: 3 + 2 es igual a cinco; pero no podemos escribir 5, porque tal cifra no existe en el sistema quinario; el cinco es ya una unidad de orden superior. Es decir, en la suma no hay unidades; escribimos 0, y el cinco, o sea, la unidad del siguiente orden, lo conservamos en la mente. Además, 0 + 3 = 3, más la unidad conservada en la mente, nos da en total 4 unidades de segundo orden. En el tercer orden obtenemos 2 + 1 = 3. En el cuarto, 4 + 2 es igual a seis, es decir, 5 + 1; escribimos 1, y al 5, o sea la unidad del orden superior- lo trasladamos más a la izquierda. La suma buscada = "11340":

$$\begin{array}{r} \text{"4203"} \\ +\text{"2132"} \\ \hline \text{"11340"} \end{array}$$

Damos al lector la posibilidad de comprobar esta adición, trasladando, previamente, los números entre comillas al sistema decimal.

Exactamente igual se realizan también las otras operaciones. Como ejercicios, ofrecemos aún una serie de problemas[8] , cuyo número el lector puede aumentar por su cuenta, a voluntad:

En el sistema quinario:

Problema 3:

$$\begin{array}{r} \text{"2143"} \\ -\text{"334"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 4:

$$\begin{array}{r} \text{"213"} \\ \times\text{"3"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 5:

$$\begin{array}{r} \text{"42"} \\ \times\text{"31"} \\ \hline \end{array}$$

En el sistema ternario:

Problema 6:

$$\begin{array}{r} \text{"212"} \\ +\text{"120"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 7:

$$\begin{array}{r} \text{"122"} \\ \times\text{"20"} \\ \hline \end{array}$$

Problema 8:

---

[8] Las respuestas a los problemas se encuentran al final del libro.

Resultados:

Problema 3.-"1304".

Problema 4.- "1144".

Problema 5.-"2402".

Problema 6.-"2010".

Problema 7.-"10210".

Problema 8.-"110".

Problema 9.-"10" residuo "11".

$$\begin{array}{r} "220" \\ \div "2" \\ \hline \end{array}$$

Problema 9:

$$\begin{array}{r} "201" \\ \div "12" \\ \hline \end{array}$$

En la realización de esa, operaciones, primero representamos mentalmente en nuestro familiar sistema decimal a los números escrito, y obtenido el resultado, de nuevo los representamos en el sistema no decimal deseado. Pero también se puede proceder en otra forma: constituir "la tabla de adición" y "la tabla de multiplicación" en aquellos sistemas en los que estén dados los números, y emplear directamente las tablas.
Por ejemplo, la tabla de adición en el sistema quinario tiene la siguiente forma:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Por medio de esta tabla podemos sumar los números "4203" y "2132", escritos en el sistema quinario, esforzando la atención mucho menos que con el método aplicado anteriormente.
Como es fácil comprender, la realización de la substracción también se simplifica.
Formemos la tabla de multiplicar ("pitagórica") para el sistema quinario:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Teniendo esta tabla ante los ojos, se puede reducir, en sí, el trabajo de la multiplicación (y de la división) de los números en el sistema quinario, como es fácil persuadirse, aplicándola a los arriba. Por ejemplo, en la multiplicación.

$$\begin{array}{r} "213" \\ \times "3" \\ \hline 1144 \end{array}$$

Razonamos así: tres por tres (de la tabla) da "14", escribimos 4 y conservamos en la mente el uno para el siguiente orden. Tres por uno, tres, mas uno del orden anterior, 4; de la tabla, 3×2 da "11", con lo que el resultado final será "1144".
Cuanto menor es la base de un sistema, tanto menores son, también, las correspondientes tablas de adición y de multiplicación. Por ejemplo, las dos tablas para el sistema ternario son:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Tabla de la adición para el sistema ternario

1	2
2	11

Tabla pitagórica para el sistema ternario

Dichas tablas se pueden, simultáneamente, memorizar y emplear para la realización de las operaciones. Las tablas de adición y multiplicación más breves corresponden al sistema binario.

0	1
1	10

Tabla de la adición para el sistema binario

$$\boxed{1 \times 1 = 1}$$

Tabla de multiplicación para el sistema binario

¡Por medio de "tablas" tan sencillas se pueden efectuar, en el sistema binario, las cuatro operaciones! Las multiplicaciones en este sistema, como tales, en esencia no existen, pues multiplicar por la unidad equivale a dejar el número sin modificación; La multiplicación por "10", "100", "1000" (es decir, por 2, por 4, por 8) conduce a un sencillo agregado, a la derecha del correspondiente número de ceros. Por lo que toca a la adición, para su realización, es necesario recordar solamente que, en el sistema binario, 1 + 1 = 10.
¿No es cierto que nosotros, con una fundamentación completa, llamamos anteriormente al sistema binario el más sencillo de todos los posibles? La gran longitud de los números de esta aritmética singular, se compensa por la sencillez; de realización de todas las operaciones aritméticas con ellos.
Se desea, por ejemplo, multiplicar

$$\begin{array}{r} \text{"1001011101"} \\ \times\text{"100101"} \\ \hline \text{"1001011101"} \\ +\text{"1001011101"}\cdot\cdot \\ \text{"1001011101"}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \hline \text{"101011101110001"} \end{array}$$

La realización, de la operación conduce únicamente a una transcripción de los números dados en una disposición ordenada: esto requiere esfuerzos mentales comparativamente menores que la multiplicación de tales números, en el sistema decimal (605 × 37 = 22 385). Si fuera adaptado por nosotros el sistema binario, el estudio de la numeración escrita requeriría una mínima tensión mental (a cambio de una máxima cantidad de papel y tinta). Sin embargo, en la numeración oral la aritmética binaria, por lo que se refiere a la comodidad de realización de las operaciones, cede en gran medida, ante nuestro decimal.
Proporcionemos también un ejemplo de la operación de división efectuada en el sistema de numeración binario:

$$\begin{array}{rl} 10000010 & : 111 \quad = 10010 \\ 111\cdots\cdots\cdot & \\ \hline 1001\cdots\cdot & \\ 111\cdots\cdot & \\ \hline 100 & \end{array}$$

En nuestro familiar sistema decimal, esta operación tendría la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} 130 \quad : 7 \quad = 18 \\ 7 \cdot \cdot \\ \hline \ 60 \\ \ 56 \\ \hline \quad 4 \end{array}$$

El dividendo, el divisor, e1 cociente y el residuo en ambos casos son, en esencia idénticos, aunque las cuentas intermedias sean diferentes.
Volver

3. ¿Par o impar?
No viendo el número, naturalmente resulta difícil saber si es par o impar. Pero desde luego, nos resulta fácil decirlo apenas percibido un número dado. Por ejemplo, ¿el número 16 es par o impar? Si sabemos que está escrito en el sistema decimal, se está en lo justo al afirmar que dicho número es par. Pero cuando se escribe en cualquier otro sistema, ¿se puede estar seguro de que él representa, infaliblemente, un número par?
Evidentemente no. Si la base es, por ejemplo, siete, "16" denota 7 + 6 = 13, un número impar, Exactamente será, también, para toda base impar. (Porque todo numero impar + 6 es también un número impar).
De aquí la conclusión de que la divisibilidad entre dos (la última cifra par) conocida por nosotros, útil incondicionalmente sólo para el sistema de numeración decimal, para otros sistemas no lo es siempre. A saber, es justa solamente para sistemas de numeración con base par: de base seis, ocho, etc. ¿Cuál es la divisibilidad entre 2 para los sistemas de base impar? Es suficiente una corta reflexión para establecerla: la suma de las cifras deberá ser par. Par ejemplo, el número "136" es par en todo sistema de numeración, inclusive también con base impar; en efecto, en el último caso tenemos: un numero impar[9] + un numero impar + un par = número par,
Con la misma precaución es necesario referirse al problema: ¿Siempre es divisible el número 25 entre cinco? En el sistema de base siete u ocho, el número así representado no es divisible entre 5 (porque es igual a diecinueve o a veintiuno). En la misma forma, la bien conocida divisibilidad entre 9 (de acuerdo a la suma de las cifras) es justa, únicamente, para el sistema decimal. Por el contrario, en el sistema quinario se aplica la divisibilidad para el 4, y, por ejemplo, en el de base siete, para el 6. Así, el número "323" en el sistema quinario es divisible entre 4, porque 3 + 2 + 3 = 8, y el número "51" en el de base siete, es divisible entre 6 (es fácil convencerse de ello trasladando los números al sistema decimal): obtenemos respectivamente, 88 y 36). El lector mismo puede darse cuenta de por qué esto es así, si profundiza bien en la deducción de la divisibilidad entre 9 y aplica los mismos razonamientos, correspondientemente modificados, por ejemplo, al sistema de base siete para la deducción de la divisibilidad entre 6.
Es más arduo demostrar por un medio puramente aritmético, la legitimidad de las siguientes tesis:

$$121 : 11 = 11$$
$$144 : 12 = 12$$
$$21 \times 21 = 441$$

en todos los sistemas de numeración (en donde se tengan las cifras correspondientes).

[9] Un número impar multiplicado por sí mismo (es decir, por un impar), siempre da un número impar (por ejemplo, $7 \times 7 = 49$, $11 \times 11 = 121$, etc.)

Para los entendidos con los rudimentos del álgebra, es fácil hallar la base, que explique la propiedad de estas igualdades. Los restantes lectores las pueden experimentar para diversos sistemas de numeración.
Volver

4. Problemas instructivos.

1. ¿Cuándo $2 \times 2 = 100$?[10]
2. ¿Cuándo $2 \times 2 = 11$?[11]
3. ¿Cuándo 10 es número impar?[12]
4. ¿Cuándo $2 \times 3 = 11$?[13]
5. ¿Cuándo $3 \times 3 = 14$?[14]

Las respuestas a estas preguntas no deben dificultarse al lector que ha estado al corriente de este capítulo.
Volver

5. Fracciones sin denominador

Estamos habituados: al hecho de que, solamente las fracciones decimales se escriben sin denominador. Por tal razón, a simple vista, al parecer, no es posible escribir directamente sin denominador la fracción 2/7 ó 1/3. Sin embargo la cuestión se nos presenta en otra forma si pensamos en que son posibles las fracciones sin denominador en otros sistemas de numeración. ¿En el sistema quinario, qué denota, por ejemplo, la fracción "0.4"? Naturalmente, 4/5. En el sistema septenario la fracción "1.27" denota 1 2/7. ¿Y qué denota en el mismo sistema septenario la fracción 0.33"? Aquí el resultado más complicado: 3/7 + 49 = 24/49.
Consideremos aún, algunas fracciones no decimales sin denominador ¿A qué es igual

1. "2.121" en el sistema ternario?
2. "1.011" en el sistema binario?
3. "3.431" en el sistema quinario?
4. "2.(5)" en el sistema septenario?

Respuestas:

1. 2 + 1/3 + 2/9 + 1/27 = 2 16,27.
2. 1 + 1/4 + 1/8 = 1 3/8.
3. 3 + 4/5 + 3/25 + 1/125 = 3 116/125.
4. 2 + 5/7 + 5/49 + 5/343 + ... = 2 5/6.

El lector puede darse cuenta fácilmente de la justeza de la íntima igualdad si prueba aplicar al caso dado con la modificación correspondiente los razonamientos que se refieren a la transformación de fracciones decimales y periódicas a ordinarias.
Para concluir el capítulo, consideremos algunos problemas de índole especial (ver las respuestas al final del libro):

---

[10] $2 \times 2 = 100$ cuando "100" está escrito en el sistema binario.
[11] $2 \times 2 = 11$ cuando "11" esta escrito en el sistema ternario.
[12] "10" es impar cuando está escrito en el sistema quinario, y también en los sistemas con base 3, 7 y 9.
[13] $2 \times 3 = 11$ cuando "11" está escrito en el sistema quinario.
[14] $3 \times 3 = 14$, cuando 14 está escrito en el sistema quinario.

Problema 10. ¿En qué sistema de numeración está efectuada la siguiente adición?:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ +\,2456 \\ 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Problema 11. En qué sistema de numeración está efectuada la división:

$$\begin{array}{l} \;\;4415400 \quad : 4532 \quad = 543 \\ \;\;40344\cdots \\ \hline \;\;34100\cdots \\ -\,31412\cdots \\ \hline \;\;\;\;22440\cdot\cdot \\ -\;22440\cdot\cdot \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

Problema 12. Escriba el número "ciento treinta" en todos los sistemas de numeración del binario a1 decimal, inclusive.

Problema 13. ¿A qué es igual el número "123" si se le considera escrito en todos los sistemas de numeración, hasta el nonario inclusive? ¿Es posible escribirlo en el sistema binario? ¿Y en el sistema ternario? Si está escrito en el sistema quinario, ¿se puede saber si es divisible exactamente entre dos, sin transcribirlo en el sistema decimal? Si está escrito en el sistema de base nueve, ¿es divisible exactamente entre cuatro?

Volver

6. Curiosidad Aritmética

$$2^5 \times 9^2 = 2592$$

Volver

[1]

Capítulo Quinto
Galería de Maravillas Numéricas

Contenido:

1. Museo De Curiosidades Aritméticas

En el mondo de los números, como también en el mundo de loa seres vivos, se encuentran maravillas auténticas, ejemplares únicos, que poseen propiedades singulares. A partir de tales números no ordinarios de dicha especie, pudo ser constituido un museo de rarezas numéricas: el presente "museo de curiosidades aritméticas". En sus vitrinas hallaremos el lugar, no solamente de los gigantes numéricos sobre los que charlaremos aún más en un capítulo especial, sino también de los números de dimensiones discretas que, en compensación, se distinguen de la serie de los otros por ciertas propiedades no habituales. Algunos de ellos atraen la atención ya, por 1a

[1] En el dibujo de esta página dice, de arriba a abajo, respectivamente: ¿10 ó 12?; pie = 12 pulgadas: metro = 10 decímetros.

apariencia; otros descubren sus particularidades singulares solamente con un conocimiento más profundo.
Las particularidades interesantes de ciertos números representados en nuestra "galería", no tienen nada en común con algunas singularidades imaginarias que, los aficionados a lo misterioso, perciben en otros números. Como ejemplo de semejantes supersticiones numéricas, puede servir la siguiente reflexión aritmética, expresada sin cautela por el conocido escritor francés Víctor Hugo:
"El tres es un número perfecto. La unidad es al número 3, lo mismo que el diámetro al círculo. El número 3 es el único que posee centro. Los demás números, son elipses que tienen dos focos. De aquí, se sigue una particularidad propia, exclusiva del número 3. Al sumar las cifras de cualquier número múltiplo de 3, la suma es divisible exactamente entre 3".
En esta vaga y aparentemente profunda revelación, todo es inexacto; lo que no es frase, carece de sentido o es un absurdo. Solamente es justa la observación sobre la propiedad de la suma de las cifras, pero dicha propiedad no surge de lo señalado, y por lo mismo no representa una particularidad exclusiva del número 3: por ella se distingue en el sistema decimal, también el número 9, y en otros sistemas, los números menores, en una unidad, que la base.
Las maravillas de nuestra "galería" son de otro tipo: en ellas no hay nada misterioso ni indescifrable.

Figura 25. Vitrina de maravillas aritméticas

Invito al lector a realizar una excursión por la galería de tales maravillas numéricas y a entablar conocimiento con algunas de ellas.
Pasemos, sin detenernos, delante de las primeras vitrinas que encierran números cuyas propiedades son bien conocidas de nosotros. Sabemos ya por qué se hallaba el número 2 en la

galería de maravillas: no porque sea el primer número par[2] sino porque es la base de un interesante sistema de numeración.[3]
No será inesperado para nosotros encontrar aquí el número 9, también naturalmente, no como un "símbolo de constancia"[4] sino como el número que nos asegura la comprobación de todas las operaciones aritmética. Pero aquí está la vitrina; veamos a través de su cristal.
Volver

2. El Número 12
¿Qué tan admirable es?. Es el número de meses en el año y el número de unidades en la docena. Pero, en esencia, ¿qué hay de particular en la docena?. Por pocos es conocido que el 12 es el antiguo y derrotado rival del número 10 en la lucha por el puesto honorífico de base del sistema de numeración. Un pueblo de gran cultura del Antiguo Oriente, los babilonios, y sus predecesores sumerios, realizaban los cálculos en el sistema duodecimal de numeración. Hasta ahora, hemos pagado algo de tributo a este sistema, no obstante la victoria del decimal. Nuestra afición a las docenas y las gruesas[5], nuestra división del día en dos docenas de horas, la división de la hora en 5 docenas de minutos, la división del minuto en otros tantos segundos, la división del círculo en 30 docenas de grados, y finalmente, la división del pie en 12 pulgadas ¿no atestigua todo esto (y muchas otras cosas) sobre la gran influencia, en nuestros días, del antiguo sistema?
¿Es conveniente que en la lucha entre la docena y la decena halla triunfado esta última?. Naturalmente, por las intensas ligas de la decena con los diez dedos, nuestras propias manos han sido y continúan siendo máquinas calculadoras naturales. Pero si no fuera por esto, entonces convendría, incondicionalmente, dar la preferencia al 12 antes que al 10. Es mucho más conveniente realizar los cálculos en el sistema duodecimal que en el decimal. Esto se debe a que el número 10 es divisible entre 2 y 5, mientras que el 12 es divisible entre 2, 3, 4 y 6. En 10 hay, en total, dos divisores; en 12, cuatro. Las ventajas del sistema duodecimal se tornan claras si se considera que en este sistema un número que termina con cero, es múltiplo de 2, 3, 9 y 6: reflexiónese: ¡qué tan cómodo es dividir un número cuando precisamente 1/2, 1/3, 1/4 y 7/6 deben ser números enteros!
Si el número expresado en el sistema duodecimal termina con dos ceros, deberá ser divisible entre 144, y por consiguiente, también entre todos los multiplicadores de 144, es decir, entre la siguiente serie de números:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Catorce divisores, en lugar de los ocho que tienen los números escritos en el sistema decimal, si terminan con dos ceros (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100). En nuestro sistema solamente fracciones de la forma 1/2, 1/4, 1/5, 1/20 etc., se convierten en decimales finitos; en el sistema duodecimal se pueden escribir: sin denominador mucho más diversas fracciones y ante todo: 1/2, 1/3, 1/4, 1/6,

[2] Como primer número par se puede, por otra parte, considerar, no al 2, sino al 0.
[3] Se refiere al sistema binario de numeración que se aplica para representación de los números y la realización de las operaciones en la generalidad de las máquinas computadoras aritméticas. La utilización de dicho sistema permite el empleo, en la construcción y análisis de esquemas funcionales de la lógica matemática y asegurar una simplificación substancial de la estructura de los dispositivos aritméticos y de memoria, en comparación con los casos en que se usan otros sistemas de numeración.
[4] Los antiguos (discípulos de Pitágoras) consideraban el 9 como un símbolo de constancia, "puesto que todos los números múltiples de 9, tienen como suma de las cifras, un múltiplo de 9".
[5] Una gruesa son 12 docenas. 144 objetos de un mismo genero constituyen una gruesa.

1/8, 1/9, 1/12, 1/16, 1/18, 1/24, 1/36, 1/48, 1/72, 1/144, las que respectivamente se representan así:

0.6: 0.4; 0.3: 0.2; 0.16; 0.14: 0.1; 0.09; 0.08; 0.06; 0.04: 0.03: 0.02; 0.01.

Por otra parte, sería un gran error pensar que la divisibilidad de un número puede depender del sistema de numeración en que esté representado. Si unas nueces contenidas en un saco, pueden ser separadas en 5 montones idénticos, entonces esta propiedad de ellas, naturalmente, no se modifica a causa de que nuestro número de nueces esté expresado en uno u otro sistema de numeración o dispuesto en un ábaco, o escrito con letras, o representado por cualquier otro método. Si el número escrito en el sistema duodecimal es divisible entre 6 o entre 72, entonces, al ser expresado en otro sistema de numeración, por ejemplo en el decimal, deberá tener los mismos divisores. La diferencia consiste únicamente en que, en el sistema duodecimal la divisibilidad entre 6 o entre 72 es fácil de descubrir (el número termina en uno o en dos ceros).

Ante tales ventajas del sistema duodecimal, no es entraño que entre los matemáticos se corriera la voz en favor de un traslado total a este sistema. Sin embargo, estamos ya demasiado acostumbrados al sistema decimal como para resolverse por tal sistema.

El gran matemático francés Laplace emitió la siguiente opinión respecto a dicho problema: "La base de nuestro sistema de numeración no es divisible entre 3 ni entre 4, es decir, entre dos divisores muy empleados por su sencillez. La incorporación de dos nuevos símbolos (cifras) daría al sistema de numeración esta ventaja; pero tal innovación sería, sin duda, contraproducente. Perderíamos la utilidad que dio origen a nuestra aritmética que es, la posibilidad de calcular con los dedos de las manos".

Por el contrario, procedía, por uniformidad, pasar también a los decimales en la medición de los arcos, de los minutos y de los grados.

Dicha reforma se intentó realizar en Francia, pero no llegó a implantarse. No había otro, aparte de Laplace que fuera un ardiente partidario de esta reforma. Su célebre libro "Exposición de un sistema del mundo" sucesivamente realiza la subdivisión decimal de los ángulos; llama grado, no a la noventava, sino a la centésima parte de un ángulo recto, minuto a la centésima parte de un grado, etc. Inclusive, Laplace emitió su opinión sobre la subdivisión decimal de las horas y de los minutos. "La uniformidad del sistema de medidas, requiere que el día esté dividido en 100 horas, la hora en 100 minutos, el minuto en 100 segundos" escribió el eminente geómetra francés.

Se ve, por consiguiente, que la docena tiene por sí misma, una larga historia, y que el número 12. no sin fundamento se encuentra en la galería de las maravillas numéricas. Por el contrario su contiguo, el número 13, figura aquí no porque sea notable, sino más bien por no serlo, aunque precisamente se emplea por una gloria sombría: ¿no es extraordinario que no habiendo nada que distinga al número, pudiera éste llegar a ser "peligrosa" pera las gentes supersticiosas?.

La forma en que fue propagada esta superstición (que se originó en la antigua Babilonia) es evidente por el hecho de que en la época del régimen zarista, en el dispositivo del tranvía eléctrico en Petersburgo no se decidieron a introducir la ruta número 13, omitiéndola y pasando a la número 14. Las autoridades pensaban que el público no querría viajar en vagones con tal "siniestro" número. Es curioso que en Petersburgo los alojamientos que atendían 13 cuartos, estuvieran solitarios... En los hoteles, generalmente no existía la habitación número 13. Para la lucha contra esta superstición numérica, sin fundamento, en algunas partes de Occidente (por ejemplo, en Inglaterra) se han constituido inclusive "Clubes del número 13" especiales.

En la siguiente vitrina del museo de maravillas aritméticas vemos ante nosotros al número 365.

Volver

3. Número 365

Es notable, ante todo, porque denomina el número de días en el año. Además, en la división entre 7 da, en el residuo, 1: por ser un residuo tan insignificante, esta propiedad del número 365 adquiere un gran significado para nuestro calendario de siete días.

Otra propiedad del número 365 no relacionada con el calendario, es

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

es decir, que el número 365 es igual a la suma de los cuadrados de tres números consecutivos, empezando por el 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

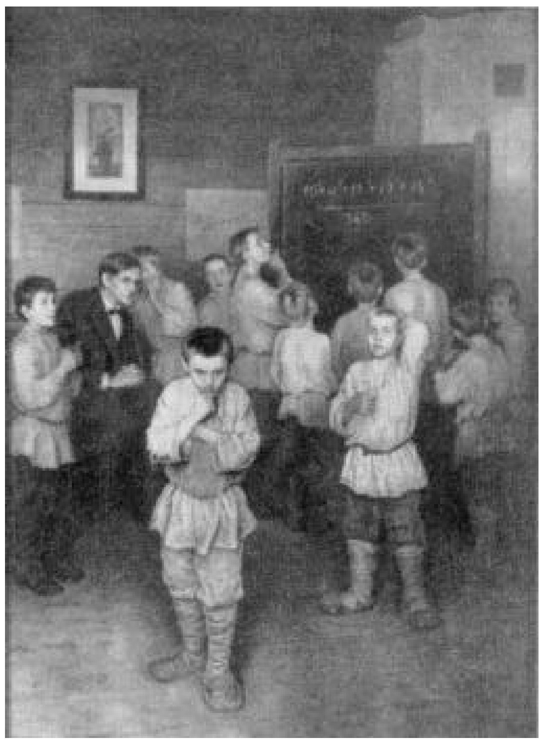


Figura 27. Viñeta del famoso cuadro del artista Bogdánov-Bielski, titulado "Un Problema Difícil"

Pero además, es igual a la suma de los cuadrados de los dos siguientes números, 13 y 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

En esta propiedad del número 365 se basa el conocido problema de S. A, Rachinsky que inspiró el famoso cuadro de Bogdánov-Bielsky. "problema difícil" (figura 27)

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} =$$

Pocos números de esta índole reúnen en nuestra galería de maravillas aritméticas.
Volver

4. Tres Nueves
En la siguiente vitrina está, expuesto el mayor de todos los números de tres cifra: el 999. Dicho número, sin duda es mucha más extraordinario que su imagen volcada 666, el famoso "número bestial" del Apocalipsis que ha inspirado un temor absurdo entre algunas gentes supersticiosas que, conforme a las propiedades aritméticas nada hay que lo distinga de los demás números.


Figura 28. Un número por el cual es fácil multiplicar

Una propiedad interesante del número 999 se manifiesta en su multiplicación con cualquier otro número de tres cifras. Entonces se obtiene un producto de seis cifras: sus tres primeras cifras constituyen el número multiplicado, disminuido de una unidad, y las tres cifras restantes (inclusive la última) son el "complemento" al 9, de las primeras. Por ejemplo:

573:

$$573 \times 999 = 572\ 427$$

Basta, solamente, echar una ojeada al siguiente renglón, para entender el origen de esta particularidad:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000-1) = 573\ 000 - 573 = 572\ 427$$

Conociendo esta particularidad, podemos multiplicar "instantáneamente" cualquier número de tres cifras por 999:

$$917 \times 999 = 966\ 083,$$
$$509 \times 991 = 508\ 491,$$
$$981 \times 999 = 980\ 019$$

.

Y puesto que 999 = 9 x 111 = 3 x 3 x 3 x 37, se pueden, otra vez con la rapidez de un rayo, escribir colonias enteras de números de seis cifras, múltiplos de 37; no conocidas las propiedades del número 999, naturalmente no se está en situación de hacer esto. Hablando brevemente, se pueden organizar ante profanos, pequeñas funciones de "multiplicación y división instantáneas".
Volver

5. El Número de Scheherazada
El que sigue en turno es el número 1001, el célebre número de Scheherazada. Pocos sospechan, probablemente, que en la denominación misma de una colección de cuentos encantados árabes se

encienta una especie de maravilla, que podría exaltar la imaginación del sultán del cuento, no en menor grado que algunas otras maravillas de Oriente, si él hubiera sido capaz de interesarse por las maravillas aritméticas.

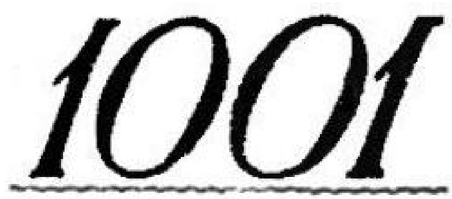


Figura 29. El número de Scheherazada

¿Qué tan notable es el número 1001? En aspecto, al parecer es muy ordinario. Inclusive, no pertenece al escogido orden de los llamados números "primos". Dicho número es divisible entre 7, 11 y 13, es decir, entre: tres números primos consecutivos, el producto de los cuales resulta ser el mencionado número. Pero la maravilla no consiste en que el número 1001 = 7 x 11 x 13, ya que aquí no hay nada de mágico. Lo mas notable es que al multiplicar un número de tres cifras por dicho número, se obtiene un resultado que consiste del mismo número multiplicado, sólo que escrito dos veces, por ejemplo:

873 x 1001 = 873 873,
207 x 1001 = 207 207,

Y aunque esto era de esperarse, puesto que

873 x 1001 = 873 x 1000 + 873 = 873 000 + 873,

aprovechando la señalada propiedad "del número de Scheherazada" se pueden lograr resultados completamente inesperados, por lo menos para el hombre no preparado.
Ahora, aclaremos en que forma.
Se puede sorprender a un grupo de camaradas no iniciados en los misterios aritméticos, con el siguiente truco, Supóngase que alguno escribe en un pedazo de papel, en secreto, el número de tres cifras que desee, y que enseguida le agrega el mismo número.
Se obtiene un número de seis cifras que se compone de tres cifras repetidas. Se le propone al mismo camarada o a su vecino dividir este número, en secreto, entre 7; además, con anticipación se predice que en la división no se obtendrá residuo. El resultado se transmite al nuevo vecino, quien de acuerdo con la proposición, lo divide entre 11, y aunque no se conoce el dividendo, uno puede afirmar que también ese número se divide sin residuo. El resultado obtenido se proporciona al siguiente vecino, al cual se le solicita que divida este número entre 13, y conforme a lo predicho de antemano, la división no dará ningún residuo. El resultado de la tercera división. sin ver el número obtenido se traslada al primer camarada con las palabras:

- *¿Este es el número que Ud. Pensó?*
- *Así es, Ud. acertó, le contestarán sin duda alguna.*

¿Cuál es la clave del truco?

Este bonito truco aritmético, que produce en los no iniciados un efecto de magia, se explica en uno forma muy sencilla: recuérdese que el agregar a un número de tres cifras el propio número, significa multiplicarlo por 1001, es decir, por el producto 7 x 11 x 13. El número seis cifras que obtiene nuestro camarada después de agregar al número dado el propio número, deberá, por esta razón, dividirse exactamente entre 7, entre 11 y entre 13; y como consecuencia de la división, consecutivamente, entre estos tres números (es decir, entre su producto 1001) se deberá naturalmente, obtener otra vez el número pensado.
La realización del truco se puede variar conforme los deseos en tal forma, que se tenga la posibilidad de encontrar el número enigmático que se obtiene en el total de los cálculos. Es sabido que el número de seis cifras sobre el cual se comienzan a hacer los cálculos, es igual al producto

(número pensado) x 7 x 11 x 13.

Por tal razón, si se pide dividir el número de seis cifras, primero entre siete, después entre 11, luego entre el número pensado entonces, con seguridad se puede encontrar como total final de todas las divisiones al 13.
Repitiendo el truco, se pide realizar las divisiones en otro orden: al principio entre 11, después entre el número pensado y entre 13. La última división deberá dar 7 como cociente. O al principio entre 13, después entre el número pensado, y luego entre 7; el total final es 11.
Volver

6. El Número 10101
Después de lo indicado sobre el número 1001, ya no será una sorpresa ver al número 10101 en las vitrinas de nuestra galería. Se adivina a qué propiedad, precisamente, está obligado este número por tal honor. El, como el número 1001, da un resultando sorprendente en la multiplicación, pero no de números de tres cifras, sino de dos cifras; todo número de dos cifras, multiplicado por 10 101, da como resultado el propio número, escrito tres veces.

Figura 30. Un número que se presta para trucos

Por ejemplo:

73 x 10 101 = 737 373
21 x 10 101 = 212 121.

La causa se aclara por el siguiente renglón:

73 x 10101 = 73 (10000 + 100 + 1) = 730000 + 7300 + 73

¿ Con ayuda de este número se pueden hacer trucos de adivinación no habitual, como con el número 1001?

Sí se puede. Aquí es posible inclusive, disponer de un truco más variado, si se tiene en cuenta que 10101 es producto de cuatro números primos:

10101 = 3 x 7 x 13 x 37.

Proponiendo a un camarada pensar un número de dos cifras, a un segundo se le pide agregarle el propio número, a un tercero agregar el propio número una vez más. A un cuarto se le pide dividir el número de seis cifras obtenido, entre 7 por ejemplo; un quinto camarada deberá dividir el cociente obtenido entre 3; un sexto divide lo que se obtuvo entre 37 y, finalmente, un séptimo divide este resultado entre 13; las cuatro divisiones se realizan sin residuo. El resultado de la última división se transmite al primer camarada: éste es, precisamente, el número pensado por él.
En la repetición del truco se puede introducir cierta variedad, empleando cada vez nuevos divisores. A saber, en lugar de los cuatro multiplicadores 3 x 7 x l3 x 37, se pueden tomar loa siguientes grupos de tres multiplicadores:

21 x 13 x 37;
7 x 39 x 37
3 x 91 x 37
7 x 13 x 111.

Este truco es fácil de modificar en forma semejante a como fue explicado en el caso anterior (en el truco con el número 1001).
El número 101001 es, quizás aun más sorprendente que el número encantado de Scheherazada, aunque también sea menos conocido en cuanto a sus propiedades singulares. Sobre él se escribió además, ya doscientos años antes, en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo donde se proporcionan ejemplos de multiplicación, "con una cierta sorpresa". Dicho número, con mayor razón, debe incluirse en nuestra colección de maravillas aritmética.
Volver

7. El Número 10001
Con este número se pueden también hacer trucos a la manera de los anteriores, aunque quizás no tan variadas.

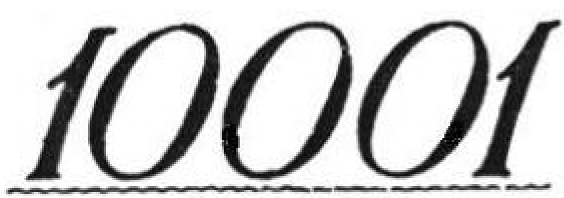


Figura 31. Otro número que se presta para trucos

Es que dicho número representa en sí, el producto de dos números primos solamente:

10 001 = 73 x 137.

Tengo confianza en que el lector, después de todo lo indicado arriba, se dará cuenta de cómo se aprovecha eso para la realización de las operaciones aritméticas "con sorpresa".

Volver

8. Seis Unidades

En la siguiente vitrina vemos una nueva maravilla del museo de curiosidades aritméticas el número que consiste de seis unidades. En virtud del conocimiento de las propiedades mágicas del número 1001, simultáneamente nos damos cuenta de que

111111 = 111 x 1001.

Figura 32. Número útil para la adivinación

Pero 111 = 3 x 37, y 1001 = 7 x 11 x 13. De aquí se sigue que nuestro nuevo fenómeno numérico, que se compone solamente de unidades, representa en sí, el producto de cinco multiplicadores primos. Combinando estos cinco multiplicadores en todas las formas posibles, en dos grupos, obtenemos 15 pares de multiplicadores que dan como producto uno y el mismo número 111111:

3 x (7 x 11 x 13 x 37) = 3 x 37037 = 111111
7 x (3 x 11 x 13 x 37) = 7 x 15873 = 111111
11 x (3 x 7 x 13 x 37) = 11 x 10101 = 111111
13 x (3 x 7 x 11 x 37) = 13 x 8547 = 111111
37 x (3 x 7 x 11 x 13) = 37 x 3003 = 111111
(3 x 7) x (11 x 13 x 37) = 21 x 5291 = 111111
(3 x 11) x (7 x 13 x 37) = 33 x 3367 = 111111

Se puede, en ese caso, poner a un grupo de 15 camaradas el trabajo de multiplicación y, aunque cada uno multiplicara un distinto par de números, todos obtendrían uno y el mismo resultado original: 111111.

El mismo número 111111 es útil también, para la adivinación de números pensados, a semejanza de los medios; usados con los números 1001 y 10101. En el caso dado se propone pensar un número de una cifra, y repetirlo 6 veces. Como divisores pueden servir aquí, cinco números primos: 3, 7, 11, 13, 37 y las combinaciones obtenidas de ellos: 21, 33, 39, etc. Esto proporciona la posibilidad de variar en extremo la realización del truco.

Por ejemplo, del número 111111 el lector ve cómo se quede emplear, para los trucos aritméticos, un número que se componga de puras unidades, si se descompone en factores. Para fortuna de los aficionados a semejantes trucos, algunos números, de tal sistema, no son primos, sino compuestos.

De los primeros 17 números de esta especie solamente los dos menores, 1 y 11, son primos, los restantes son compuestos. He aquí cómo se descomponen en factores primos, los primeros diez de los números compuestos de este sistema.

111 = 3 x 37

1.111	=	11 x 101
11.111	=	41 x 271
111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 37
1.111.111	=	239 x 4649
11.111.111	=	11 x 73 x 101 x 137
111.111.111	=	9 x 37 x 333 667
1.111.111.111	=	11 x 4l x 271 x 9091
111.11.111.111	=	21649 x 513 239
111.111.111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 87 x 101 x 9901

No todos los números aquí dados son convenientes para la adivinación.
Pero números de 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 12 unidades son más o menos útiles para este objeto. Ejemplos de su uso para adivinación, se darán al final del siguiente capítulo.
Volver

9. Pirámides Numéricas
En las siguientes vitrinas de la galería admiramos notabilidades numéricas de una especie muy particular: con semejanza a pirámides compuestas de números. Consideremos más de cerca a la primera de ellas (fig. 33).

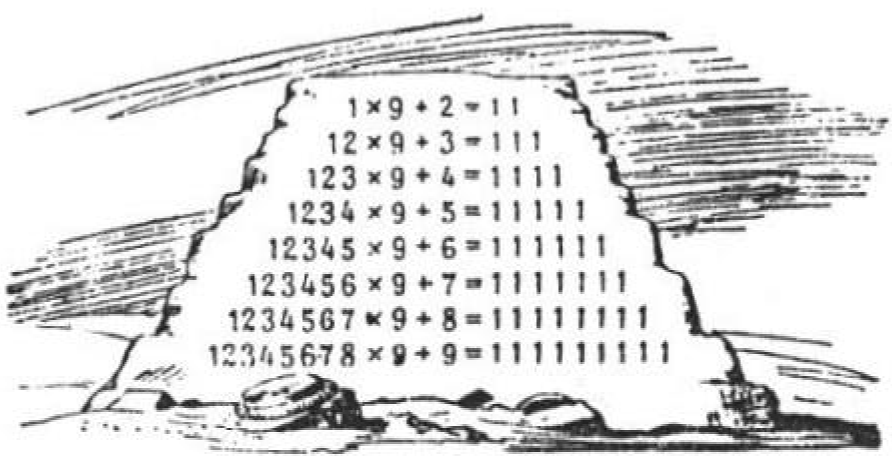


Figura 33. Primera pirámide numérica

¿Cómo explicar estos resultados singulares de la multiplicación?
Para comprender esta rara singularidad, tomemos como ejemplo cualquiera de las filas intermedias de nuestra pirámide numérica: 123456 x 9 + 7. En lugar de la multiplicación por 9, se puede multiplicar por (10-1), es decir, agregar el 0 a la derecha y restar el multiplicando:

123456 x 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = 1.111.111

Basta echar una ojeada sobre la última substracción para comprender por qué se obtiene un resultado que consiste solamente de unidades.
Podemos también explicar esto, partiendo de otros razonamientos. Para que un número de la forma 12345… se convierta en un número de la forma 11111…, es necesario restar 1 a la

segunda de sus cifras, 2 a la tercera. 3 a la cuarta, 4 a la quinta y así sucesivamente; en otras palabras, restar de él el mismo número de la forma 12345 … privado de su última cifra, es decir disminuido 10 veces y carente previamente de su última cifra.
Ahora, es comprensible que para la obtención del resultado buscado es necesario multiplicar por 10 nuestro número y agregarle la cifra que sigue, en calidad de última cifra, y restar al resultado el número original (y multiplicar por 10 y restar el multiplicando quiere decir, multiplicar por 9).
En forma análoga se explica la formación de la siguiente pirámide numérica (fig. 34), que se obtiene en la multiplicación de una determinada serie de cifras por 8 y la adición de cifras que consecutivamente aumentan.

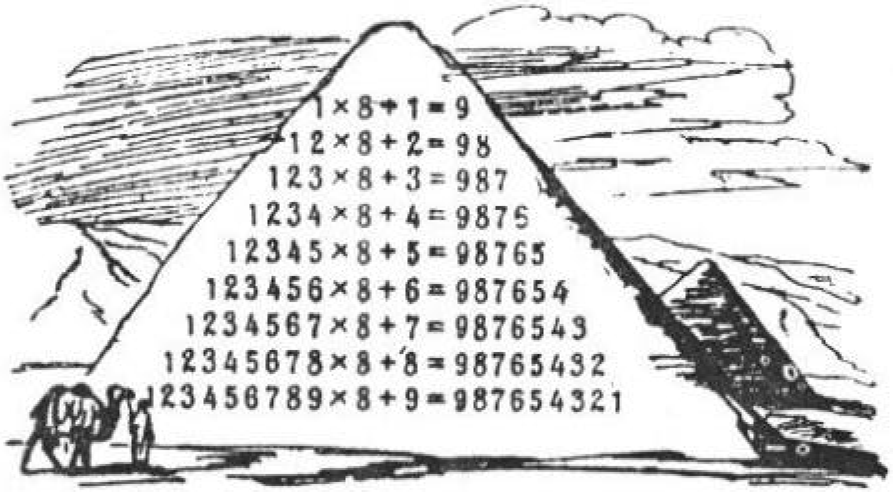


Figura 34. Segunda pirámide numérica

Particularmente interesante en la pirámide, es la última fila donde, como resultado de la multiplicación por 8 y la adición del 9, tiene lugar la transformación de la serie natural total de cifras, en dicha serie, pero con una disposición inversa.
Intentemos explicar esta particularidad.
La obtención de los extraños resultados se aclara por el siguiente renglón:

12345 x 9 + 6 = 111111[6]

12 345 x 8 + 5 = 98765

es decir

12345 x (9 -1) x 8 + 5 + 1 – 1 = 12345 x 9 – 12345 - 1 = 111111 - 12 316.

Pero restando del número 111111 el número 12346 compuesto de una serie de cifras crecientes, obtendremos, como es fácil de comprender, una serie de cifras decrecientes: 98765.
He aquí, finalmente, la tercera pirámide numérica, que también requiere explicación (fig. 35).

[6] Por qué 12345 x 9 + 6 da precisamente 111111, fue mostrado en la consideración de la pirámide anterior.

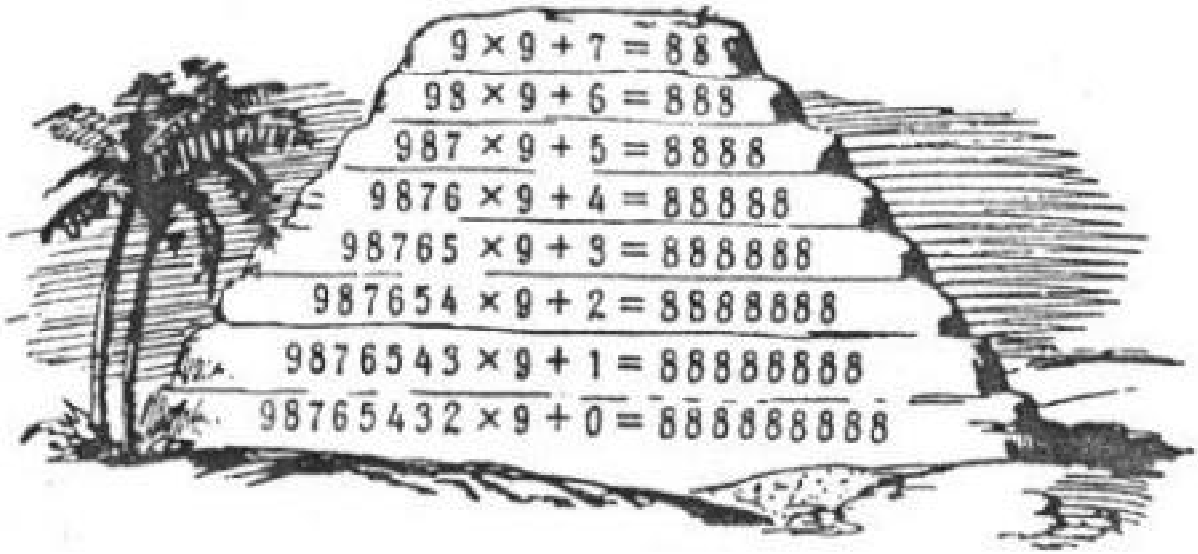


Figura 35. Tercera pirámide numérica

Esta pirámide es una consecuencia directa de las dos primeras. La relación se establece muy fácilmente. De la primera pirámide sabemos ya que, por ejemplo:

$$12345 \text{ x } 9 + 6 = 111111.$$

Multiplicando ambos miembros por 8, tenemos:

$$(12\ 345 \text{ x } 8 \text{ x } 9) \text{ x } (6 \text{ x } 8) = 888888.$$

Pero de la segunda pirámide se sabe que

$$12345 \text{ x } 8 + 5 = 98765$$

ó

$$12345 \text{ x } 8 = 98760.$$

Vale decir,

$$888888 = (12\ 345 \text{ x } 8 \text{ x } 9) + (6 \text{ x } 8)$$
$$888888 = (98\ 760 \text{ x } 9) + (5 \text{ x } 9) + 3$$
$$888888 = (98\ 760 + 5) \text{ x } 9 + 3$$
$$888888 = 98\ 765 \text{ x } 9 + 3.$$

Se convence uno de que todas estas pirámides numéricas no son tan misteriosas como parece a primera vista. Pero algunos las consideran, sin embargo, no descifradas. Me tocó una vez, verlas impresas en un periódico alemán con una nota: "La causa de tan sorprendente singularidad, hasta el presente todavía nadie se la ha explicado. ..."
Volver

10. Nueve Cifras Iguales
El último renglón de la primera "pirámide" (fig. 33)

12 345 678 x 9 + 9 = 111.111.111

representa un ejemplo de un grupo completo de interesantes curiosidades aritmética en nuestro museo, reunidas en una tabla (ver fig. 36).

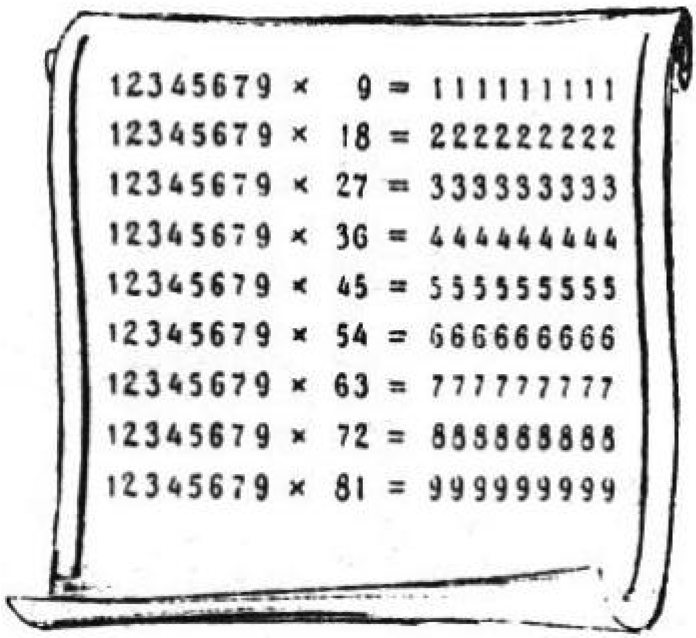


Figura 36.

¿Dónde está la tal singularidad en los resultados? Tomemos en cuenta que

12345 678 x 9 + 9 = (12345 678 + 1) x 9 = 12 345 679 x 9.

Por esta razón

12 345 679 x 9 = 111111111.

Y de aquí se sigue directamente que

12345 679 x 9 x 2 = 222222222
12345 679 x 9 x 3 = 333333333
12345 679 x 9 x 4 = 444444444

Volver

11. Escala Numérica
Es interesante determinar qué se obtiene si el número 111111111, con el cual ahora tenemos que ver, se multiplica por sí mismo. De antemano se puede sospechar que el resultado deberá ser singular, pero ¿cuál es precisamente?
Si se pasee capacidad para dibujar con claridad en la imaginación una serie de cifras, se llegará a encontrar el resultado que nos interesa, aun sin recurrir a los cálculos sobe el papel. En esencia, aquí la cuestión conduce solamente a una disposición adecuada de los productos parciales,

porque al multiplicar se hace solamente de unidad por unidad. La adición de los productos parciales lleva a un sencillo cálculo de unidades[7]. He aquí el resultado de esta multiplicación, singular en su especie (en la realización de la cual no se llega a recurrir a la operación de multiplicación):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
&&&&&&&\times&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
\hline
&&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
&&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\\
&&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&\\
&&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&\\
&&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&\\
&&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&\\
&&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&\\
&1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&&&&&&&&\\
\hline
1&2&3&4&5&6&7&8&9&8&7&6&5&4&3&2&1
\end{array}
$$

Las cifras de este resultado disminuyen simétricamente, a partir del centro, en ambas direcciones. Aquellos lectores que se hayan cansado de la revista de las maravillas numéricas, pueden abandonar aquí la "galería" y pasar a las siguientes secciones en donde se muestran trucos y están presentados los gigantes y enanos numéricos: deseo señalar que ellos pueden suspender la lectura de este capítulo y pasar al siguiente. Pero quien todavía desee ponerse al corriente de algunas notabilidades del mundo de los números, lo invito a visitar conmigo una pequeña serie de vitrinas cercanas.

Las maravillas numéricas sobre las cuales se hablará ahora reclaman del lector, el conocimiento de las llamadas fracciones periódicas infinitas. Aquellos lectores que no estén al corriente de ellas, les propongo transformar las siguientes fracciones ordinarias; en decimales, conforme al método bien conocido:

¼, 1/8, 1/3, 1/11

Es fácil persuadirse de que las dos primeras fracciones, al convertirse en decimales, dan un número finito de dos y tres cifras respectivamente.

Al convertir en decimales las fracciones restantes, se obtienen series infinitas de cifras que se repiten en un orden determinado:

1/3 = 0.3333333….
1/11 = 0.09090909090909…

[7] En el sistema binario de numeración, como ya fue explicado (ver Cap IV) todas las multiplicaciones son, precisamente de tal especie.

Tales fracciones se denominan periódicas, y el grupo de cifras que se repite en ellas se llama periodo.
Volver

12. Anillos Mágicos
¡Qué extraños anillos están expuestos en la siguiente vitrina de nuestra galería! Ante nosotros (fig. 37) hay tres anillos planos que giran uno con el otro.

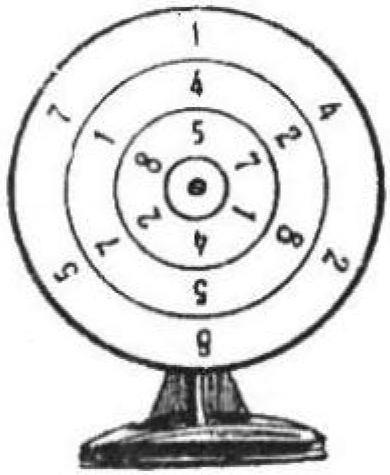


Figura 37. Anillos numéricos giratorios

En cada anillo están escritas seis cifras, en uno y el mismo orden, que forman el número: 142857. Los anillos poseen la propiedad admirable siguiente: en cualquier forma en que sean girados, en la adición de dos números escritos sobre ellos (contando a partir de cualquier cifra en la dirección de giro de las manecillas del reloj), obtenemos en todos los casos el mismo número de seis cifras (en general el resultado será de seis cifras) ¡solamente que algo adelantado! (ver fig. 37). En la posición que se representa en la fig. 37, obtenemos en la adición de los dos anillos exteriores.

$$\begin{array}{r} 142857 \\ \underline{-428571} \\ 571428 \end{array}$$

es decir, otra vez la misma serie de cifras: 142857 solamente las cifras 5 y 7 se han transferido del final al principio.
En otras disposiciones de los anillos, relativas de uno con respecto a otro, tenemos los casos:

$$\begin{array}{r} 285714 \\ \underline{-571428} \\ 857142 \end{array}$$

```
 714285
-142857
 857142
```

Y así sucesivamente.
La excepción lo constituye el caso en que en el resultado se obtiene 999999:

```
 714285
-285714
 999999
```

(La causa de otras desviaciones respecto de la regla indicada, el lector la podrá captar cuando termine de leer este apartado).
Además, esa misma serie de cifra, en idéntica secuencia la obtenemos también en la substracción de los números escritos en los anillos.
Por ejemplo:

```
 428571      571 128      714285
-142857     -285 714     -142857
 285714      285 714      571428
```

La excepción la constituye el caso en que son puestas en coincidencia cifras idénticas; por supuesto, la diferencia es igual a cero.
Pero esto no es todo. Al multiplicar el número 142857 por 857 por 2, 3, 4, 5 ó por 6, se obtiene otra vez la misma serie de cifras, pero desplazada en una disposición circular, en una o en varias cifras:

142 857 x 2 = 285 714
142 857 x 3 = 428 571
142 857 x 4 = 571 428
142 857 x 5 = 714 285
142 857 x 6 = 857 142

¿Qué tanto están condicionadas estas enigmáticas particularidades de nuestro número?
Damos con el camino de la clave, si prolongamos un poco la última tabla y probamos multiplicar nuestro número por 7: como resultado se obtiene 999999. Vale decir, el número 142 857 no es otra cosa que la séptima parte de 999999 y, por consiguiente, la fracción 142857/999999 = 1/7
En efecto, si se transforma 1/7 en fracción decimal se obtiene:

1/7 = 0.142 857...

es decir

1/7 = 0.(142 857)

Nuestro enigmático número es el periodo de una fracción periódica infinita que se obtiene en la transformación de 1/7 en decimal. Es comprensible ahora, por qué en la duplicación, triplicación, etc. de este número se produce solamente una nueva colocación de un grupo de cifras en otro lugar. En efecto, la multiplicación de este número por 2 lo hace igual a 2/7 y por lo tanto, equivalente a la transformación en fracción decimal, ya no de 1/7, sino de 2/7. Empezando a transformar la fracción 2/7 a decimal, se observa que la cifra 2 es uno de aquellos restos que ya obtuvimos en la transformación de 1/7: es evidente que deberá repetirse la precedente serie de cifras del cociente, pero empezando éste con otra cifra; en otras palabras, deberá obtenerse el mismo periodo, pero sólo que algunas de sus cifras iniciales se encuentran al final. Lo mismo se produce, también en la multiplicación por 3, por 4, 5, y 6, es decir. por todos los números que se obtienen en los restos. En la multiplicación por 7 deberemos obtener la unidad, o lo que es lo mismo 0.9999...

Los interesantes resultados de la adición y la substracción de los números, en los anillos hallan explicación en el hecho de que 142857 es el período de la fracción igual 1/7. En efecto, ¿qué hacemos, propiamente, girando el anillo en unas cuantas cifras?. Pasemos el grupo de cifras del principio al final, es decir, de conformidad con lo indicado, multipliquemos el número 142857 por 2, 3, 4, etc. Por lo tanto, todas las operaciones de adición y substracción de los números escritos en los anillos, llevan a la adición y substracción de las fracciones las 1/7, 2/7, 3/7 y así sucesivamente. Como, resultado debemos obtener, naturalmente fracciones de un séptimo, es decir, de nuevo nuestra serie de cifras 142857 en una u otra disposición circular. De aquí es necesario excluir solamente el caso en que se sumen, tales números de las fracciones de un séptimo, que en total den la unidad o más que 1.

Pero precisamente los últimos casos no se excluyen totalmente: ellos dan un resultado en verdad, no idéntico a los considerados pero fundamentalmente de acuerdo con ellos. Consideremos atentamente qué deberá obtenerse de la multiplicación de nuestro enigmático número con multiplicaciones mayores que 7, es decir por 8, 9, etc.

El multiplicar 142857 por 8, por ejemplo, lo podemos hacer así: multiplicar inicialmente por 7, y el producto (es decir, a 999999) agregar nuestro número:

$$142\ 857 \times 8 = 142\ 857 \times 7 + 142\ 857 = 999999 + 142\ 857 =$$

$$1000\ 000 - 1 - 142\ 857 = 1000\ 000 + (142\ 857 - 1).$$

El resultado final 1.142.856 se distingue del multiplicando 142857 únicamente en que hay antepuesta una unidad, y la última cifra está disminuida por una unidad. De acuerdo a una regla similar se compone el producto de 142857 por todo número mayor que 7, como es fácil ver en los siguientes renglones:

142 857 x 8	= (142 857 x 7) + 142 857	= 1 142 856
142 857 x 9	= (142 857 x 7) + (142 857 x 2)	= 1 285 713
142 857 x 10	= (142 857 x 7) + (142 857 x 3)	= 1 428 570
142 857 x 16	= (142 857 x 7 x 2) + (142 857 x 2)	= 2 285 712
142 857 x 39	= (142 857 x 7 x 5) + (142 857 x 4)	= 5 571 423

La regla más general es la siguiente: en la multiplicación de 142857 por cualquier multiplicador, es necesario multiplicar solamente por el residuo de la división del multiplicador entre 7; se antepone a este producto el número que indica la cantidad de sietes que existen en el multiplicador ese mismo número se substrae al resultado[8]. Supóngase que deseamos multiplicar 142857 por 88. El multiplicador 88 en la división entre 7 da 12 en el cuociente, el resultado de las operaciones indicadas es:

12571428 - 12 = 12571416

De la multiplicación 142857 x 365 obtenemos (puesto que 365 en la división entre 7 da en el cuociente 52 y como resto 1):

52 142 857 - 52 = 52 142 805

Aprendiendo esta sencilla regla y recordando los resultados de la multiplicación de nuestro singular número por los multiplicadores del 2 al 6 (que es muy difícil, siendo necesario tan sólo, recordar con qué cifras comienzan), se puede sorprender a los no iniciados con la rapidez de la multiplicación de un número de seis cifras; y para no olvidar este número sorprendente, observemos que él procede de 1/7, o lo que es lo mismo de 2/14: tenemos las tres primeras cifras, de nuestro número: 142. Las tres restantes se obtienen por substracción de las tres primeras de 1999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ \underline{-142} \\ 857 \end{array}$$

Ya hemos tenido que ver con tales números precisamente cuando nos pusimos al corriente de las propiedades del número 999. Recordando lo indicado allí, nos, damos cuenta de que el número 142857 es, evidentemente, el resultado de la multiplicación de 143 por 999:

142857 = 143 x 999.

Pero 143 = 13 x 11. Recordando lo observado anteriormente sobre el número 1001, igual a 7 x 11 x 13, estamos en condiciones, sin efectuar operaciones, de predecir qué deberá obtenerse de la multiplicación 142857 x 7:

142857 x 7 = 143 x 999 x 7 = 999 x 11 x 13 x 7 = 999 x 1001 = 999999

(todas estas transformaciones, claro está, se pueden efectuar mentalmente).
Volver

13. Una Familia Fenomenal

El número 142857 que acabamos de tratar es uno de los miembros de una familia completa de números que poseen las mismas propiedades. He aquí uno de tales números: 0 588 235 294 117 647 (el 0 antepuesto es necesario). Si se multiplica este número por 4, por ejemplo, obtenemos aquella misma serie de cifras, sólo que las cuatro primera cifran estarán colocados al final:

[8] Si el multiplicador es múltiplo de siete, el resultado es igual al número 999999, multiplicado por la cantidad de sietes en el multiplicador; tal multiplicación se efectúa mentalmente en forma sencilla. Por ejemplo, 142857 x 28 = 999999 x 4 = 4000000 - 4 = 3999996

0 588 235 294 117 647 x 4 = 2 352 941 176 470 588.

Disponiendo las cifras de este número sobre varios anillos móviles (fig. 38) como en el caso anterior, en la adición de los números de dos anillos obtendremos el mismo número, sólo que desplazado en el orden circular:

0 588 235 294 117 647
\+ 2 352 941 176 470 588
2 941 176 470 588 235

Naturalmente, las tres series que se disponen en los anillos, son idénticas:

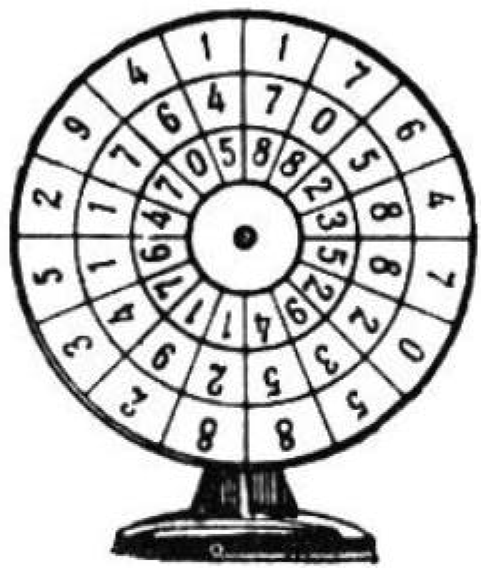


Figura 38.

De la substracción de los números de dos anillos, se obtiene otra vez el mismo círculo de cifras:

2 352 941 176 470 588
\- 0 588 235 294 117 647
1 764 705 882 352 94l

Finalmente, este número, como también el considerado antes, consiste de dos mitades: las cifras de la segunda mitad son el complemento a 9 de las cifras de la primera mitad.
Tratemos de encontrar la clave de todas estas particularidades.
No es difícil darse cuenta en qué forma la serie numérica dada ha resultado ser un pariente cercano del número 142 857; el número del anillo anterior representa en sí, el período de una fracción infinita igual a 1/7; el nuevo número es, probablemente, el período de cualquier otra fracción: y en efecto, nuestra larga serie de cifras no es otra cosa, que el período de la fracción infinita que se obtiene de la transformación de la fracción simple 1/17 a fracción decimal:

1/17 = 0 (0 588 235 294 117 647).

He aquí por qué, en la multiplicación de este número por tus multiplicadores del 1 al 16, se obtiene aquella misma serie de cifras en la cual, solamente una o varias cifras iniciales están transferidas al final del número. Y por el contrario, al transferir una o varias cifras de la serie, del comienzo al final, aumentamos el número en varias veces (del 1 al 16 inclusive). Sumando dos anillos girados, uno con relación al otro, producimos la adición de dos números multiplicados, por ejemplo, por tres y por diez, y naturalmente, se obtiene el mismo anillo de cifras, debido a que la multiplicación por 3 + 10, es decir, por 13, motiva solamente una transferencia insignificante del grupo de cifras en la disposición circular.

Con una cierta posición de los anillos se obtienen, sin embargo, sumas que difieren un poco de la serie inicial. Si, por ejemplo, giramos un anillo en tal forma que se sume un número multiplicado por seis con uno multiplicado por 15, en la suma se deberá obtener un número multiplicador por 6 + 15 = 21. Y tal producto, como es fácil darse cuenta, es algo distinto del producto por un multiplicador menor que 17. En efecto, nuestro número, período de una fracción igual a 1/17, al multiplicarse por 17 deberá dar 16 veces (es decir, tantos como cifras existan en el período de nuestra fracción periódica), o el 1 con 17 ceros menos 1. Por esta razón, en la multiplicación por 21, es decir por 4 + 17, deberemos obtener nuestro número cuadruplicado antepuesto al cual se halla el 1, y del orden de las unidades se resta 1. El número cuadruplicado empieza con las cifras que se obtienen en la transformación de la fracción siempre 4/17 en fracción decimal:

$$4 : 17 = 0.23\ .\ .\ .$$

El orden de las cifras restantes es conocido: 5291... Vale decir, nuestro número, multiplicado por 21 será:

2 352 941 176 470 587.

Lo mismo se obtiene de la adición de los círculos de cifras con una disposición correspondiente. En la substracción de los anillos numéricos de tal caso, no se puede.

De números semejantes a los dos con que hemos entablado conocimiento, existe una infinidad. Ellos constituyen una familia completa, puesto que están ligados por un origen común: a partir de la transformación de las fracciones simples en fracciones decimales infinitas. Pero no todo período de una fracción decimal tiene la interesante propiedad, anteriormente considerada, de dar en la multiplicación una transferencia circular de cifras. Sin entrar en sutilezas de la teoría, observamos que esto tiene lugar, solamente para aquellas fracciones en que el número de cifras de su periodo es menor en una unidad, al denominador de la fracción simple correspondiente. Así, por ejemplo

1/7 da en el período 6 cifras
1/17 da en el período 16 cifras
1/19 da en el período 13 cifras
1/23 da en el período 22 cifras
1/29 da en el período 28 cifras

Si la condición indicada ahora (relativa al número de cifras del periodo) no se satisface, entonces el correspondiente período da un número que no pertenece a la interesante familia numérica que nos ocupa. Por ejemplo, 1/13 da una fracción decimal con seis (y no con 12) cifras en el período:

$$1 / 13 = 0.076923$$

Multiplicando por 2, obtenemos un número completamente distinto.

$$2 / 13 = 0.153846$$

¿Por qué? Porque entre los restos de la división 1 / 13 no estaba el número 2. De los diferentes restos existen tantos, como cifras hay en el periodo, es decir, 6; de los diversos multiplicadores para la fracción 1 / 13 tenemos 12, por consiguiente, no todos los multiplicadores estarán entre los restos, sino únicamente 6. Es fácil darse cuenta de que estos multiplicadores son los siguientes: 1, 3, 4, 9, 10, 12. La multiplicación por estos 6 números da una nueva colocación circular (076 923 x 3 = 230 769), no siendo así en la multiplicación por los números restantes. Esta es la razón por la cual de 1/13 se obtiene un número útil sólo en parte para el "anillo mágico".

Volver

14. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 91 + \dfrac{5823}{647} \\ 94 + \dfrac{1578}{263} \\ 96 + \dfrac{1428}{357} \end{cases}$$

Capítulo Sexto
Trucos sin Engaños

Contenido:

1. El Arte del calculista Hindú

Los trucos aritméticos son trucos sin engaño, honestos. Aquí no se pretende engañar, ni se trata de adormecer la atención del espectador. Para realizar un truco aritmético no son necesarios ni una milagrosa destreza de manos, ni una sorprendente agilidad De movimientos, ni cualesquiera otras capacidades artísticas que, algunas veces, requieren prácticas de varios años. Todo el secreto del truco aritmético consiste en el estudio minucioso y la utilización de las propiedades interesantes de los números, con un íntimo conocimiento de sus particularidades. Quien conoce la

clave de un truco, se lo representa sencillo y claro, mientras que, para quien desconoce la aritmética, una operación ordinaria le parece, inclusive, una especie de truco.
Antiguamente, cuando la capacidad de efectuar aun las operaciones aritméticas ordinarias con grandes números, conocidas ahora por todo escolar, constituía el arte de unos cuantos, para los demás se mostraba como una capacidad excepcional. En la antigua narración hindú "Nal y Damaianti"[1] encontramos un eco de tal punto de vista sobre las operaciones aritméticas.

Nal, que sabía manejar perfectamente caballos, acompañado en una ocasión del calculista virtuosa Ritupern pasó delante del frondoso árbol de Vibitaka. De repente el contador vio a los lejos el árbol Vibitaka de espeso follaje. "Escucha, dijo, en la tierra nadie tiene todos los conocimientos: en el arte de guiar caballos tú eres el primero, en cambio, yo lo soy en el arte de calcular..."
Y en demostración de su arte el calculista instantáneamente determinó el número de hojas en el frondoso Vibitaka. Al pedirle Nal, sorprendido, que le confiriera el secreto de mi arte, Ritupern accedió.
"...lo que había hecho Ritupern, tal y como le dijo a Nal, consistía en contar las hojas ramas, de Vibitaka, y multiplicar los números..."

El secreto arte consistía, como puede suponerse, en que el cálculo directo de las hojas, que requiere cierto tiempo y paciencia, se substituía por el cálculo del número de hojas de una sola rama y, por la multiplicación de este número por el número de ramas de cada ramificación, y después por el número de ramificaciones del árbol (suponiendo que todas las ramificaciones se constituían idénticamente por ramas, y las ramas por hojas).
La clave de la generalidad de los trucos aritméticos es tan sencilla como el secreto del "truco" de Ritupern. Basta sólo saber en qué consiste el secreto del truco, e inmediatamente se aprende el arte de realizarlo, a la manera que aprendió el legendario Nal por el sorprendente arte del cálculo rápido. En la base de todo truco aritmético se halla una determinada particularidad interesante de los números, por lo que el conocimiento de trucos semejantes resulta tanto instructivo, como recreativo.
Volver

2. Sin Abrir los Monederos

El prestidigitador esparce sobre la mesa un montón de monedas por la suma de 3 rublos, y presenta el problema: distribuir el dinero en 9 monederos, de tal modo que se pueda pagar cualquier suma hasta 3 rublos, sin abrir los monederos.
Esto puede parecer completamente irrealizable. Pero no se piense que el prestidigitador preparó una trampa a partir del juego de palabras o de su inesperada, interpretación.

[1] Traducción libre al ruso de Zhúkovsky. Este episodio, sobre el que se habla adelante, se encuentra en el capítulo VIII de dicho relato.

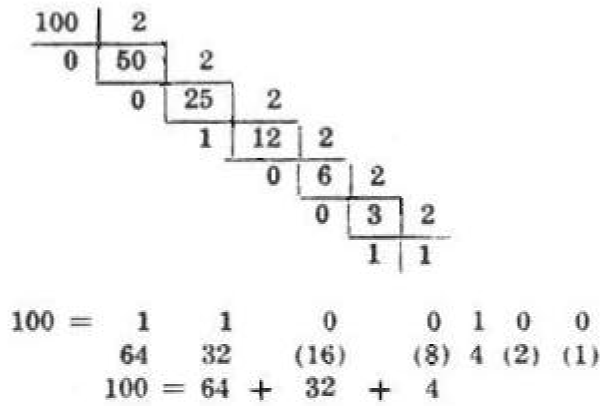


Figura 39.

Obsérvese: el propio prestidigitador se pone a trabajar. Distribuyendo las monedas en los monederos, y sujetando a cada uno, una etiqueta con la designación de la cantidad colocada (ver fig. 39), él propone que se determine cualquier suma que no exceda los 3 rublos.
Se nombra la primera que viene a la mente: 2 rudos 69 kopeks.
Sin tardanza, el prestidigitador elige y entrega 4 monederos. Al abrirlos se halla:

en uno	64 k
en otro	45 k
en un tercero	1r.28 k
en un cuarto	32 k
Total	2r.69 k

Uno está predispuesto a sospechar del prestidigitador en cuanto al hábil cambio, de monederos, y reclama la repetición del truco. Para esto, se ponen todos los monederos bajo nuestra custodia, y cuando se nombra una nueva suma, por ejemplo, 1 rublo, ó 7 kopeks, ó 2 r. 93 k., aquel indicara rápidamente cuáles de los monederos, que se tienen bajo el brazo se deberán tomar, para que se forme la suma enunciada. A saber:

- Para un rublo, 6 monederos (32 kopeks, 1k., 45k., 16k., 2 k., 4 k.,)
- Para 7 kopeks, 3 monederos (1 k., 2 k., 4 k.)
- Para 2 rublos 93 kopeks, 6 monederos (1r. 28 k., 32 k., 8 k., 45 k., 64 k., 16 k.)

Conforme al deseo del prestidigitador, los monederos resultan siempre adecuados para constituir cualquier suma nombrada (hasta 3 rublos). ¿Cómo se explica esto?
El secreto radica en distribuir el dinero en la siguiente forma: 1 k., 2 k., 4 k., 8 k., 16 k., 32 k., 64 k., 1 r. 28 k. el dinero restante en el último monedero, es decir, 300,

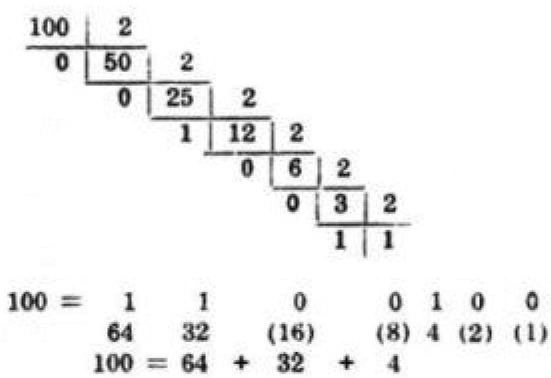
$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = 300 - 255 = 45 \text{ k.}$$

Con los primeros 8 monederos, como es fácil convencerse, se puede formar cualquier suma desde 1 hasta 255 kopeks; si se da una suma mayor, entonces se entrega el último monedero con 45 kopeks, y la diferencia se forma de los primeros ocho monederos.

Se puede verificar la utilidad de tal agrupamiento de números haciendo bastantes ensayos, y convencerse de que a partir de ellos se puede efectivamente constituir todo número que no exceda de 300. Pero quizá interese también por qué razón la serie de números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. posee tan extraordinaria propiedad. Es fácil de comprender esto, si se recuerda que los números de nuestra serie representan potencias del número 2:

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^3\ \text{etc}$$ [2]

y por consiguiente se pueden considerar como órdenes del sistema binario de numeración; y puesto que todo número se puede escribir en el sistema binario, entonces es posible para todo número el que se forme en base a una suma de potencias de 2, es decir, de números de la serie 1, 2, 4, 8, 16, etc. Y cuando se toman monedas para formar, en base a ellos, el contenido del número dado, en esencia, se expresa dicho número en el sistema binario de numeración. Por ejemplo, el número 100 se forma fácilmente, si se le representa en el sistema binario:



Cuadro 26

Recordemos que, en el sistema binario, el primer lugar desde la derecha lo ocupan las unidades, el segundo los doses, el tercero los cuatros, y así sucesivamente.
Volver

3. Adivinar el Numero de Cerillos

La propiedad del sistema binario se puede utilizar también para el siguiente truco: Propóngase a cualquiera, colocar sobre una mesa una caja de cerillos, incompleta y que, en línea con ella y a su izquierda, se coloquen 7 papelillos de forma rectangular. Después, ausentándonos, pidamos que se haga lo siguiente: dejando la mitad de cerillos en la caja, que se traslade la otra mitad al papelillo más próximo; si el número de cerillos es impar, el cerillo excedente se coloca al lado del papelillo. Es necesario dividir en dos partes iguales los cerillos que se encuentran sobre el papelillo (no tocando al que se halla junto): una mitad se coloca en la caja y la otra se pone en el siguiente papelillo; en el caso de un número impar, el cerillo que queda se pone, junto al segundo papelillo. Después se procede en igual forma, restituyendo cada vez, de vuelta a la caja, la mitad de cerillos y la otra mitad poniéndola sobre el siguiente papelillo, sin olvidar colocar un cerillo a un lado cuando se presente un número impar.

[2] Aquellos que estudian álgebra saben que el número 1 se pueda considerar como el 2 elevado al exponente cero.

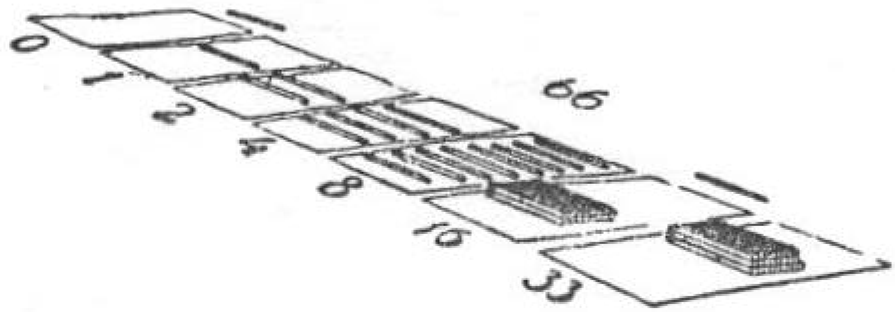


Figura 40. Adivinación del número de cerillos. Acciones sucesivas del que propone

Al final, todos los cerillos, salvo los que se hallan junto a los papelillos, se restituyen a la caja (ver figs. 40 y 41).

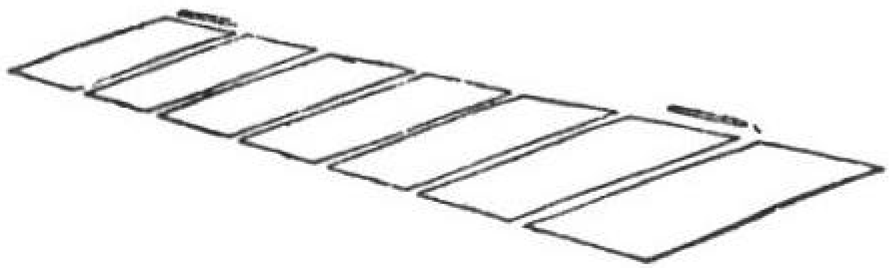


Figura 41. Continuación del truco: aspecto final de los papelillos

Cuando se haya hecho esto, uno se presenta en la habitación y, echando una mirada sobre los papelillos vacíos, nombra el número total de cerillos.
¿Cómo se puede, conforme a los papelillos vacíos y a los singulares cerillos fortuitos, adivinar el número inicial de cerillos en la caja?
Estos papelillos "vacío", en el caso dado, son muy elocuentes: conforme a ellos y a los cerillos singulares se puede literalmente leer el número buscado, porque está escrito, sobre la mesa, en el sistema binario de numeración. Aclaremos esto con un ejemplo.

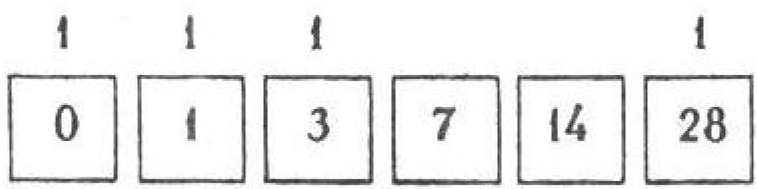


Figura 42. Otro caso de adivinación. Principio del truco

Supóngase que el número de cerillos en la caja es 66. Las operaciones sucesivas con ellos y el aspecto final de los papelillos están mostrados en los esquemas de las Figs. 40 y 41.

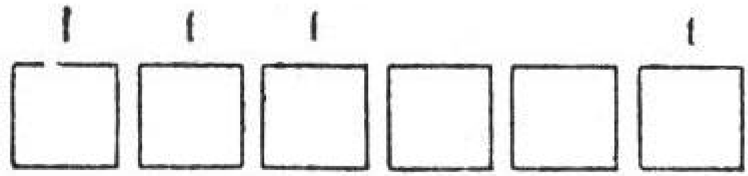


Figura 43. Final del truco

No es difícil darse cuenta de que las operaciones efectuadas con los cerillos, en esencia, son las mismas que hubiésemos realizado de haber querido determinar el número de cerillos de la caja, en el sistema binario de numeración; el esquema final representa directamente este número en el sistema binario si los papelillos vacíos se adoptan como ceros, y los papeles con un cerillo al lado, como unidades. Leyendo el esquema de izquierda a derecha, obtenemos:

1	0	0	0	0	1	0
64	32	16	8	4	2	1

en el sistema decimal:

$$64 + 2 = 66$$

Si hubiera 57 cerillos, los esquemas serían los correspondientes a las figuras 42 y 43.
El número buscado, escrito en el sistema binario es:

1	1	1	0	0	1
32	16	8	4	2	1

Y en el sistema decimal:

$$32 + 16 + 8 + 1 = 57.$$

Volver

4. "Lectura de Pensamientos" Conforme a Cerillos
La tercera variante del mismo truco representa, en sí, un método singular de adivinación de un número pensado, conforme a cerillos. El que piense el número, deberá dividirlo mentalmente por la mitad; esta mitad obtenida otra vez por la mitad, y así sucesivamente (de un número impar se quita una unidad), y en cada división debe colocar ante sí un cerillo, conforme a lo largo de la mesa si divide un número par, y transversalmente si llega a dividir un número impar. Al final de la operación se obtendrá un dibujo como el mostrado en la Fig. 44.

Figura 44. Adivinación del número pensado conforme a cerillos: lo que hace el que propone

Se fija la mirada en esta figura, y se nombra correctamente el número pensado: 137
¿Cómo se llega a saber?
El método resulta claro por sí mismo, si en el ejemplo elegido (137) sucesivamente se indica junto a cada cerillo, el número en cuya división aquel hubiese sido determinado (Fig. 45).

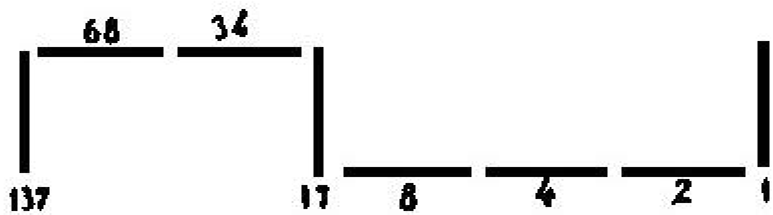


Figura 45. El secreto del truco: lo que hace el adivinador

Ahora, puesto que el último cerillo en todos los casos denota el número 1, hay que partir de él para, a través de las divisiones precedentes, llegar hasta el número inicialmente pensado. Por ejemplo, de acuerdo con la figura 46 se puede calcular que el número pensado era el 664.

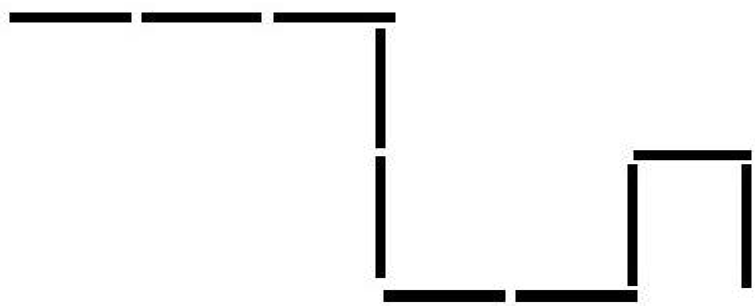


Figura 46. ¿Qué número está representado aquí?

En efecto, realizando las duplicaciones sucesivamente (empezando desde el final) y no olvidando agregar, donde sea necesario, la unidad, obtenemos el número pensado (ver Fig. 47).

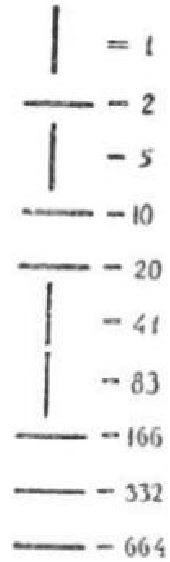


Figura 47. Respuesta al problema de la figura 46

De esta manera haciendo uso de los cerillos, se sigue el curso de los pensamientos ajenos, y se restablece toda la cadena de cálculos.

EL mismo resultado se puede obtener en otra forma considerando que, el cerillo que se halla en posición horizontal, deberá corresponder en el sistema binario al cero (la división entre 2 no da residuo), y el que se halla en posición vertical, a la unidad.

Así, en el primer ejemplo (figs. 44 y 45) tenemos el número (leyendo el dibujo de derecha a izquierda)

1	0	0	0	1	0	0	1
128	64	32	16	8	4	2	1

o, en el sistema decimal:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

Y en el segundo ejemplo (fig. 46) el número pensado se representa en el sistema binario en la forma siguiente:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

o en el sistema decimal:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

Trátese de conocer qué número se pensó si se ha obtenido el dibujo de la Fig. 48.

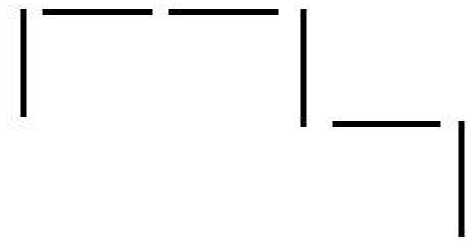


Figura 48. ¿Qué número está representado en esta figura?

Esto es fácil. Al número "100101" en el sistema binario, le corresponde en el decimal:

32 + 4 + 1 = 37

Es necesario observar que la unidad obtenida en la última división, deberá ser indicada, también, por un cerillo en posición vertical.
Volver

5. Sistema de Pesas Ideal
Quizá en ciertos lectores ya ha surgido una pregunta:
¿por qué, para la realización de las experiencias antes descritas, empleamos precisamente el sistema binario? Puesto que todo número se puede representar en cualquier sistema, entre otros también en el decimal, ¿qué explica aquí la predilección por el binario?
Esto se explica debido a que en este sistema, además del cero, se utiliza sólo una cifra más: la unidad, y por consiguiente, el número se constituye de diferentes potencias de 2, tomando sólo una cada vez. Si en el truco con los monederos distribuyéramos el dinero, por ejemplo, conforme al sistema quinario, entonces podría formarse cualquier suma sin abrir los monederos, pero solamente en el caso en que cada uno de los monederos que tenemos se repitiese no menos de 4 veces (en el sistema quinario se emplean, además del cero, 4 cifras).
Por otra parte, ocurren casos en los que, para semejantes menesteres, es más conveniente usar no el binario, sino el ternario, un poco modificado. Aquí viene al caso el antiguo famoso "problema sobre las pesas" que puede servir de tema, también, para un truco aritmético.
Supóngase que uno se ha propuesto inventar un juego de 4 pesas, por medio de las cuales sea posible pesar cualquier número entero de kilogramos, desde 1 hasta 40. EL sistema binario determina el juego:

1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg.

con el que se pueden pesar todas las cargas comprendidas entre 1 y 31 kg Pero esto, evidentemente, no satisface las condiciones requeridas, ni por lo que se refiere al número, ni por lo referente a la carga límite (31 kg en lugar de 40 kg). Por otro lado, no se ha empleado aquí la posibilidad de colocar pesas, no solamente sobre un platillo de pesos, sino sobre el otro también; es decir, además de que se pasa por la suma de pesas, también se pasa por su diferencia. Lo último da combinaciones mucho más diversas, por lo que uno se pierde completamente en búsquedas, no pudiendo poner aquellas en cualquier sistema.
Si no se tiene la suerte de caer en el camino correcto, estará uno preparado dudosamente, en general, para la resolución del problema con un número pequeño de pesas, como es cuatro.

Figura 49. Con la ayuda de estas cuatro pesas se puede pesar cualquier carga comprendida entre 1 y 40 kilogramos.

Un iniciado sale de esta dificultad, con una sencillez pasmosa, proponiendo las 4 siguientes pesas (Fig. 49)

1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg

Cualquier número entero de kilogramos, hasta 40 kg, se puede pesar con tales pesas; colocándolas en uno o en ambos platillos de pesos (ver la siguiente tabla).
No proporcionamos ejemplos, porque es fácil que cada uno por sí mismo, se dé cuenta de la completa utilidad de tal, juego de pesas, para nuestro objetivo. Analicemos con detenimiento el por qué precisamente la serie indicada posee esta propiedad. Probablemente[3], los lectores ya observaron que estos números son la serie de potencia con base 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$$

Así pues, habremos de recurrir al sistema ternario de numeración. Las pesas son cifras de este sistema ternario. ¿Pero cómo puede aprovecharse dicho sistema, cuando un peso deseado se obtiene en la forma de una diferencia de dos pesas?; ¿y cómo evitar la necesidad de retornar al duplicamiento de pesas (en el sistema ternario, además del cero, se emplean dos cifras: 1 y 2)?
Lo último se logra por la introducción de cifras "negativas". El hecho conduce, sin más, a que en lugar de la cifra 2 se emplee 3 - 1, es decir, la unidad del orden superior, a la cual se le resta una unidad del orden inferior. Por ejemplo, el número 2 en nuestro sistema ternario modificado no se denota por el 2, sino por el $1\bar{1}$, en donde el signo menos, arriba de la cifra de las unidades, significa que esta unidad no se suma, sino se resta. En la misma forma, el número 5 se representa no por 12, sino por $1\bar{1}\bar{1}$ (es decir, 9, 3, 1 = 5).

[3] La unidad se puede considerar como el 3 elevado al exponente cero (en general como el resultado de elevar cualquier número al exponente cero).

Ahora está claro que, si cualquier número se puede representar en el sistema ternario por medio del cero (es decir, por el signo de carencia de número) y de una sola cifra solamente, precisamente con una unidad sumada o restada, entonces de los números 1, 3, 9, 27 se puede, sumándolos o restándolos, formar todos los números desde el 1 hasta el 40. Ciertamente, escribimos todos estos números empleando pesas en lugar de cifras. El caso de la adición corresponde, en el acto de pesar, al caso en que las pesas se colocan sobre un platillo; y el caso de la substracción, cuando parte de las pesas se ponen sobre un platillo con mercancía, y por consiguiente, el peso de estas se resta del peso de las demás pesas. El cero corresponde a la ausencia de pesas.

Como se sabe, este sistema no se emplea en la práctica. Por doquier en el mundo, donde esta adoptado el sistema métrico de medidas se usa un juego de 1, 2, 2, 5 unidades, y no de 1, 3, 9, 27, aunque con el primero se pueden pesar cargas solamente hasta 10 unidades, y en el segundo hasta 40. El juego 1, 3, 9, 27 no se usaba tampoco cuando el sistema métrico todavía no se adoptaba. ¿Cuál es la causa de la renuncia en la práctica, a este sistema de pesas que parecía el más perfecto?

La razón es que el sistema de pesas ideal es conveniente sólo en el papel, pues su empleo en la práctica es dificultoso. Si se pesara solamente un número dado de unidades de peso, por ejemplo, 400 gr. de mantequilla o, 2500 gr. de azúcar, el sistema de pesas consistente en 100, 300, 900, 2700 podría ser empleado en la práctica (aunque también allí se tendría que buscar largamente, cada vez, la combinación decisiva). Pero cuando se tenga que determinar cuánto pesa una mercancía dada, entonces semejante sistema de pesas se muestra muy inconveniente: aquí, frecuentemente, con motivo de la adición de una unidad a las pesas suministradas, se produce una substitución total de la combinación anterior, por otra nueva. Bajo tales condiciones, el acto de pesar se convierte en una cuestión extremadamente lenta y además muy fatigosa. No todos se dan cuenta rápidamente de que, por ejemplo, el peso de 19 kg, se obtiene si en un platillo se colocan las pesas de 27 kg y 1 kg, y sobre el otro platillo, 9 Kg; el peso de 20 Kg, si sobre un platillo se ponen las pesas de 27 kg y 3 kg, y sobre el otro, 9 kg y 1 kg En cada acción de pesar se puede caer en el problema de resolver rompecabezas semejantes. El sistema de pesas 1, 2, 2, 5, no conduce a tales dificultades.

Volver

6. Predecir la Suma de Números no Escritos

Uno de los "números" más sorprendentes, entre los realizados por el prodigioso calculista soviético R. S. Arrago, es la adición con la rapidez del rayo, con sólo una ojeada de una columna completa de números de varias cifras.

¿Pero qué decir sobre un hombre que puede escribir la suma, aún antes de que le sean nombrados todos los sumandos?

Esto naturalmente, es un truco, y se efectúa en la siguiente forma:

El adivinador propone escribir cualquier número de varias cifras; lanzando una mirada sobre este primer sumando, el adivinador escribe en un pedazo de papel la suma de toda la futura columna de tres sumandos, y la transmite a alguien, en depósito. Después de esto, pide al mismo, o a otro de los asistentes, escribir un nuevo sumando cualquiera. Y él mismo, enseguida, escribe rápidamente el tercer sumando. Se suman los tres números escritos y se obtiene, justamente, el resultado que fue escrito con anterioridad por el adivinador, en el papel que se ha guardado en depósito.

Si por ejemplo, se escribió en primer lugar 83267, entonces el adivinador escribe la suma futura: 183266. Después se escribe, supongamos, 27935 y el adivinador escrita el tercer sumando 72064:

I	Alguien	83.267
III	Alguien	+ 27.935
IV	EL adivinador	72.064
II	Suma	183.266

Se obtiene exactamente la suma predicha, aún cuando el adivinador no podía saber cuál seria el segundo sumando. El adivinador puede predecir también, una suma de 5 ó 7 sumandos, pero entonces él mismo escribe dos o tres de ellos. No se pueden tener sospechas sobre algún cambio del papel con el resultado, puesto que hasta el último momento se conserva en el bolsillo del depositario. Evidentemente, el adivinador emplea una cierta propiedad de los números, desconocida por uno. ¿Cuál es?

EL adivinador hace uso de la propiedad de que, de la adición de 5 nueves (99.999) a un número de cinco cifras, este número se incrementa en 100.000 - 1, es decir, antepuesta, a él aparece una unidad, y la última cifra se ve disminuida por otra unidad. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 83.267 \\ \underline{+\ 99.999} \\ 183.266 \end{array}$$

Esta suma, es decir, la suma del primer número escrito por nosotros y de 99 999, el adivinador precisamente la escribe sobre el pedazo de papel que depositará como el resaltado futuro de la adición; y para que dicho resultado se justifique, él, viendo nuestro segundo sumando., elige su tercer sumando en tal forma que, conjuntamente con el segundo, constituya el 99 999: es decir, resta de 9 cada cifra del segundo sumando. Estas operaciones, fácilmente las puede uno observar en el ejemplo anterior y también en los siguientes:

I	Alguien	379.264
III	Alguien	4.873
IV	El adivinador	995.126
II	Suma	1.379.263

I	Alguien	9.035
III	Alguien	5.669
IV	El adivinador	4.330
II	Suma	19.034

Resulta difícil adivinar una suma si el segundo sumando contiene mayor cantidad de cifras que el primero, ya que el adivinador no podrá escribir un tercer sumando que, disminuyendo al segundo, sea capaz de reducir la suma para que dé el número predicho. Esto sólo sería posible recurriendo a la substracción, lo cual ya sale de los planes del truco. A causa de esto, un adivinador experimentado deberá limitar previamente, la libertad de elección para el segundo sumando, a esta condición.

El truco resulta más imponente, cuando en la invención de los sumandos participan varias personas. Después del primer sumando, por ejemplo 437.692, el adivinador ya predice la suma de los cinco números, y escribirá 2.437.690 (aquí se agregará dos veces 999.999, es decir, 200 000 - 2). Todo lo demás es claro debido al siguiente esquema:

I	Uno escribió	437.692
III	Otro escribió	822.541
V	Un tercero escribió	263.009
IV	EL adivinador escribió	177.458
VI	EL adivinador escribió	736.990
II	Suma	2.437.690

Tomemos otro ejemplo:

I	Uno escribió	7.400
III	Otro escribió	4.732
V	Un tercero escribió	9.000
IV	EL adivinador escribió	5.267
VI	EL adivinador escribió	999
II	Suma	27.938

A los lectores les resultará interesante ahora, conocer cómo está descrito el mismo truco por el escritor soviético Shíshkov, en su novela "Los extraños":

"Iván Petrovich arrancó una hojita de su cuaderno de notas y dándosela a un chico, le preguntó.

- ¿Tienes un lápiz? Escribe un número cualquiera.

EL niño escribió. Iván Petrovich vio el número, y escribió en otro papel un número más.

- Ahora, escribe otro debajo de él. ¿Ya lo escribiste? Ahora yo escribiré un tercer número. Ahora suma los tres números.

En dos minutos quedó lista la respuesta verificada. El ingeniero Voshkin (sobrenombre del niño) mostró su cálculo:

$$\begin{array}{r} 46.853 \\ +\ 21.398 \\ \underline{78.601} \\ 146.852 \end{array}$$

- Ciento cuarenta y seis mil ochocientos cincuenta y dos, Iván Petrovich.

- Sumaste en mucho tiempo. Aquí tengo la respuesta. Yo también la sabía, pero desde que tú escribiste el primer numero. Helo aquí. Toma mi papel.

El niño vio incrédulo el papel en que Iván Petrovich había escrito el resultado, y era exactamente el 146.852".

En la novela, el truco no va acompañado de la solución, pero para uno, es completamente comprensible su sencilla hace aritmética.

Volver

7. Sorpresa Aparente.

En el año 1916, durante el apogeo de la guerra imperialista, algunos periódicos de la neutral Suiza se entretenían con una "adivinación" aritmética sobre el destino futuro de los emperadores de Alemania y Austria. "Los profetas" sumaban las siguientes columnas de números:

	Para Guillermo II	Para Francisco José
año de nacimiento	1859	1830
año de llegada al trono	1888	1888
años de reinado	28	68
edad	57	86
Suma	3832	3832

En la coincidencia de las sumas, "los profetas" vieron un sombrío augurio para los personajes coronados, y puesto que cada total representaba en sí, el doble del año 1916, a ambos emperadores se les predijo la ruina, precisamente en dicho año.
Mientras tanto, desde el punto de vista matemático la coincidencia de resultados no es sorprendente. Basta modificar un poco el orden de los sumandos, y resulta comprensible el por qué ellos dan en el total, el doble del año 1916. En efecto, repartamos los sumandos en la siguiente forma:

- Año de nacimiento
- edad
- año en que llegó al trono
- años de reinado.

¿Qué deberá obtenerse, si al año de nacimiento se le agrega la edad? Sin duda, la fecha del año en que se produce el cálculo. En la misma forma, si al año de llegada al trono se le añade el número de años de reinado, se obtiene de nuevo el año en que se realizan los cálculos. Es claro que el total de la adición de nuestros cuatro sumandos no puede ser otro, que el doble del año de realización del cálculo. Evidentemente, el futuro de los emperadores no depende en absoluto de semejante aritmética.

Puesto que de lo indicado arriba no todos se dan cuenta, se puede aprovechar esto para un truco aritmético recreativo. Propóngase a cualquiera escribir, a escondidas de uno, cuatro números:

- Año de nacimiento
- Año de ingrese a la escuela (a la fábrica, etc.)
- Edad
- Años estudiando en la escuela (trabajando en 1a fábrica, etc.)

Uno puede ponerse a adivinar la suma de estos números, aunque ninguno de ellos nos sea conocido. Para esto se duplica el año de realización del truco y se anuncia el total. Si, por ejemplo, el truco se realiza en el año 1961, entonces la suma será 3922. Para tener la posibilidad de realizar con éxito este truco varias veces, sin revelar el secreto, uno obliga a los oyentes a efectuar sobre la suma cualquier operación aritmética, encubriendo con esto, el método.
Volver

8. División Instantánea

De la numerosa variedad de trucos de este género, describamos uno basado en una propiedad, ya conocida por nosotros, del multiplicador que consiste de una serie de nueves: cuando se multiplica por él un número con varias cifras, se obtiene un resultado que consta de dos partes: la primera es, el número multiplicado disminuido en una unidad; la segunda es, el resultado de la substracción de la primera mitad respecto del multiplicador. Por ejemplo:

$$247 \times 999 = 246.753$$
$$1.372 \times 9999 = 13.718.628$$

La causa de esto se ve fácilmente del siguiente renglón:

$$247 \text{ x } 999 = 247 \text{ x } (1000 - 1) = 247.000 - 247 = 246.999 - 246.$$

Aprovechando esto, se propone a un grupo de camarada efectuar la división de números de varias cifras: a uno 68 933 106 : 6894, a otro 8 765 112 348: 9999, a un tercero 543 456:544, a un cuarto 12 948 705 : 1295, etc., y uno se pone a tomar la delantera a todo: ellos, realizando los mismos problemas. Y antes de que ellos se empiecen a ocupar del asunto, uno entrega ya a cada uno un papelillo con el resultado correcto obtenido de la división: al primero 9999, al segundo 87 652, al tercero 999, al cuarto 9999. Uno puede por si mismo, al imaginar una serie de otros procedimientos, conforme al ejemplo indicado, sorprender a tus no iniciados con la realización simultánea de 1a división: para esto se aprovechan ciertas propiedades de aquellos números que se hallan en la "Galería de las maravillas numéricas" (ver capítulo V).

Volver

9. La Cifra Favorita

Propóngase a cualquiera, que le comunique su cifra favorita. Supongamos que le han nombrado a uno la cifra 6.

-¡Es sorprendente!, exclama uno, Esta es justamente, una de las cifras significativas más notables.

- ¿Por qué dicha cifra es notable?, se pregunta el interesado interlocutor.

- Lo es, por lo que verá Ud. enseguida: multiplique la cifra dada, por algún número, por ejemplo 9; y el número obtenido (54) escríbalo como multiplicador del número 12 345 679:

$$12\ 345\ 679 \times 54$$

¿Qué se obtuvo en el producto?

Nuestro interlocutor efectúa la multiplicación, y con sorpresa obtiene el resultado, que está constituido exclusivamente por su cifra favorita:

666 666 666.

Vea que fina percepción matemática tiene Ud., concluye uno, ¡Ud. supo elegir de todas las cifras, justamente la que posee una propiedad tan notable!

Sin embargo, ¿cuál es la cuestión aquí?

Exactamente la misma refinada inclinación, se manifestaría en nuestro interlocutor, si hubiera elegido alguna otra de las nueve cifras significativas, porque cada una de ellas posee esa propiedad:

$$12\ 345\ 679 \times 4 \times 9 = 444\ 444\ 444$$
$$12\ 345\ 679 \times 7 \times 9 = 777\ 777\ 777$$
$$12\ 345\ 679 \times 9 \times 9 = 999\ 999\ 999$$

Por qué razón esto es así, uno lo comprende, si se recuerda que se habló sobre el número 12 345 679 en la "Galería de maravillas numéricas".
Volver

10. Adivinar la Fecha de Nacimiento
Los trucos que se relacionan con esta categoría, pueden ser modificados en diversas formas. Yo describo una de las especies de este truco, demasiado complicado, pero que precisamente por eso motiva un gran efecto.
Supongamos que Ud. nació el 18 de mayo y que ahora tiene 23 años. Yo, naturalmente, no conozco ni la fecha de vuestro nacimiento, ni vuestra edad. Sin embargo yo me pongo a adivinar eso, forzando a Ud. a realizar una cierta serie de cálculos,
A saber: Yo le pido a Ud. que multiplique el número de orden del mes (mayo, 5º mes), por 100; que agregue al producto el día del mes (18); que duplique la suma, al resultado le añada 8, el número obtenido lo multiplique por 5, al producto le agregue 4, multiplique el resultado por 10, le sume 4, y al número obtenido le agregue vuestra edad (23).
Cuando Ud. haya realizado todo esto, me comunica el resultado final de los cálculos. Yo resto de él 444, y la diferencia la distribuyo en grupos de derecha a izquierda, conforme a 2 cifras en cada uno: Obtengo simultáneamente tanto el día y el mes de vuestro nacimiento, como vuestra edad.
En efecto, realicemos sucesivamente todos los cálculos indicados:

$$5 \times 100 = 500$$
$$500 + 18 = 518$$
$$518 \times 2 = 1\ 036$$
$$1\ 036 + 8 = 1\ 044$$
$$1\ 044 \times 5 = 5\ 220$$
$$5\ 220 + 4 = 5\ 224$$
$$5\ 224 \times 10 = 52\ 240$$
$$52\ 240 + 4 = 52\ 244$$
$$52\ 244 + 23 = 52\ 267$$

Efectuando la resta 52 267 - 444, obtenemos el número 51 823.

Ahora, dividamos este número en grupos de dos cifras, de derecha a izquierda:

5, 18, 23,

es decir, 5º mes (mayo); número del día, 18; edad 23 años.

¿Por qué obtuvimos este resultado?
Nuestro secreto es fácil de entender tras considerar la siguiente igualdad

$$\{[(100m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = 10000m + 100t + n.$$

Aquí la letra m denota el número de orden del mes, t el día del mes, n la edad. El primer miembro de la igualdad expresa todas las operaciones realizadas sucesivamente por Uds., y el segundo miembro, lo que se obtiene, si se eliminan paréntesis y se realizan las simplificaciones posibles.
En la expresión

$$10\,000\ m + 100\ t + n$$

ni n, ni m, ni t pueden ser números con más de dos cifras; por tal razón, el número que se obtiene en el resultado, deberá siempre, en la división en grupos, con dos cifras cada uno, descomponerse en tres partes expresadas por los números buscados m, t y n.
Dejamos a la inventiva del lector el imaginar modificaciones del truco, es decir, otras combinaciones de operaciones que den un resultado semejante.
Volver

11. Una de las "Operaciones Favoritas" de Magnitski
Propongo al lector descubrir también, el secreto del siguiente sencillo truco, que fue descrito ya en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo "Sobre ciertas operaciones recreativas utilizadas en aritmética".
Consistía en dar a ocho hombres, (designados por los números del 1 al 8) un anillo, para que uno de ellos, sin mostrarlo, se lo pusiera en una de las tres articulaciones de uno de los dedos. Por ejemplo, el anillo quedaría en la segunda articulación del dedo meñique (es decir, el 5º dedo) del 4º hombre. Se preguntaba: ¿En cuál de los ocho hombres, en qué dedo y en cuál articulación del dedo se encuentra el anillo?. y enseguida, en ausencia del adivinador se debían hacer las siguientes operaciones:

Figura 50. Truco matemático de la Aritmética de Magnitski. Se ha reproducido el grabado como aparece en la obra mencionada, con las palabras escritas en ruso antiguo, y que significan sucesivamente, de arriba hacia abajo: persona: - multiplique: - sume: - multiplique: - sume el numero del dedo: - multiplique: - sume el numero 2 de la articulación

"El número del hombre que tenga el anillo, multiplicarlo por 2; al resultado, sumarle 5, y multiplicar por 5 la suma: agregar el número del dedo en que está el anillo, y multiplicar el resultado por 10; agregar el número de la articulación.
Este resultado se debe dar al hombre que no había visto lo anterior. EL, después de restar a este número 250, obtiene 452, es decir, 4^{to} hombre, 5^{to} dedo, 2^{a} articulación".
No necesitamos decir que este truco ya era conocido 200 años atrás; problemas como éste habían sido planteados por Bashede-Maziriaka en sus "Problemas numéricos instructivos y recreativos", en el año 1612; y aún antes, por Leopardo Pisano (Fibonacci) (año 1202). En general, se puede decir que muchos de los juegos matemáticos, rompecabezas y acertijos, que se practican en nuestro tiempo, tienen un origen muy antiguo.
Volver

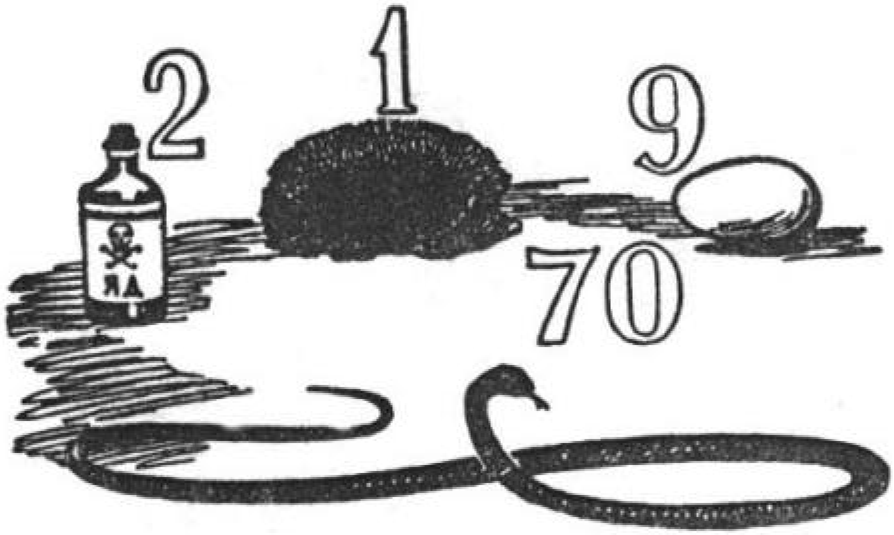
12. Adivinación de Números
Finalmente, sin preguntarle nada a Ud., yo adivino el resultado que se obtiene en el total de cálculos efectuados con un número pensado.
Piense cualquier cifra, excepto el cero. Multiplíquela por 37. Lo obtenido multiplíquelo por 3. Borre la última cifra del producto, y el número que quede divídalo por el número pensado inicialmente no habrá resto.
Yo le puedo decir qué número obtuvo Ud., aunque todo esto lo escribí mucho tiempo antes de que Ud. procediera a la lectura del libro.
Ud. obtuvo el número 11.

La segunda vez hagamos el truco en otra forma. Piense un número de dos cifras. Escriba a la derecha de él el mismo número otra vez. El número de cuatro cifras obtenido divídalo entre el número pensado: la división se realiza sin resto. Sume todas las cifran del cociente. Ud. obtuvo 2. Si no es así, verifique cuidadosamente sus cálculos y se convencerá de que se equivocó Ud., y no yo.
¿Cuál es la clave de estos, trucos?
Clave: Nuestro lector ahora ya está suficientemente experimentado en el descifiramiento de trucos, y no requiere de mis largas explicaciones. En la primera prueba de adivinación, el número pensado se multiplicó inicialmente por 37, después por 3.
Pero 37 x 3 = 111, y multiplicar una cifra por 111 equivale a constituir un número por tres cifras idénticas (por ejemplo, 4 x 37 x 3 = 444). Qué hicimos después? Borramos la última cifra y, por consiguiente, se obtuvo un número de dos cifras idénticas (44) el que naturalmente, debería dividirse por la cifra pensada, y dar 11 como cociente.
En la segunda prueba, el número pensado de dos cifras, lo escribimos dos veces: por ejemplo, pensando 29, se escribió 2929.
Esto es completamente igual a multiplicar el número pensado por 101 (en efecto, 29 x 101 = 2929). Como esto yo lo se, puedo con justeza prever que de la división de tal número de cuatro cifras entre el número pensado, se obtiene 101 y que, por consiguiente, la suma de las cifras del cociente (1 + 0 + 1) es igual a 2.
Como se ve, la adivinación está basada en las propiedades de los números 111 y 101, por lo que estamos en el derecho de colocar ambos números en nuestro museo aritmético.
Volver

13. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 1 + \\ + 24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} + \\ + 47\frac{3}{6} + 52\frac{9}{18} \end{cases}$$

Volver



Capítulo Séptimo
CALCULO RAPIDO

Contenido:

1. Fenómenos Reales y Ficticios
Quien haya asistido a sesiones de nuestro calculista soviético Arrago, puede no sorprenderse por sus enormes capacidades de cálculo. Aquí ante nosotros ya no hay trucos, sino un notable don natural. El cubo del número 4729, por ejemplo, Arrago lo calculó ante mí mentalmente en menos de un minuto (resultado: 105.756.712.489), y en la multiplicación 679.321 × 887.064, también mentalmente, empleó en total 1 1/2 minutos.
Yo he tenido la posibilidad de observar el trabajo de este fenomenal calculista, no solamente en el estrado, sino también en reuniones domésticas, a solas, y me convencí de que no emplea ningún método especial de cálculo, y calcula mentalmente, en general, como lo hacemos nosotros sobre e1 papel. Pero su extraordinaria memoria para los números lo ayuda a pararse sin la escritura de los resultados intermedios, y la rapidez de inteligencia le permite operar con los números de dos cifras tan fácilmente, como nosotros efectuamos las operaciones con números de una cifra. Gracias a esto, la multiplicación entre números de seis cifras resulta, para él, un problema de no mayor complicación que lo que para nosotros significa la multiplicación de números de tres cifras.
Tales fenómenos, como Arrago entre nosotros, o en Occidente Inodí, Diamandi, Rückle, el Dr. Fred Brauns, se cuentan con los dedos. Pero conjuntamente con ellos se consagran también, matemáticos de estrado de otro género, que fundamentan su arte en unos u otros trucos aritméticos. Usted puede haber llegado a escuchar o inclusive a asistir a "sesiones de geniales

matemáticos" que calculaban de memoria, con una rapidez sorprendente, cuántos, días, minutos y segundos tiene usted, en qué día de la semana nació, etc. Para realizar una gran parte de estos cálculos, no es necesario, sin embargo, poseer una capacidad matemática extraordinaria. Es necesario, solamente, conocer algunos secretos de estos trucos, al revelamiento de los cuales, pasamos enseguida.
Volver

2. Memorización de Números

Un calculista rápido, deberá poseer ante todo, un excelente desarrollo de la memoria para los números. Los siguientes récords muestran hasta qué refinamiento llega tal memoria en los mejores calculistas. El famoso calculista alemán Rückle se aprendió de memoria un número que se compone de 504 cifras, en el transcurso de 35 minutos, y su compatriota doctor Brauns destrozó este récord, haciendo lo mismo ¡en menos de 13 minutos!
Pero naturalmente, tal memoria fenomenal es dotada por la naturaleza en forma muy especial. Los calculistas profesionales que se consagran al estrado, no poseyendo una memoria natural para los números, se ayudan así mismos por diferentes medios artificiales (los llamados "mnemotécnicos"). En la vida diaria nosotros mismos hemos intentado emplear semejantes métodos, la mayor parte, es necesario reconocerlo, demasiado mal elegidos. Deseando, por ejemplo, recordar el número de teléfono 25-49[1] depositamos la esperanza en el hecho de que este número es fácil de reconstruir en la memoria, ya que está, compuesto de dos cuadrados exactos: $25 = 5^2$ =, $49 = 7^2$. Pero cuando es menester recordarlo en un momento dado, resulta que nos confundimos entre tantos otros números telefónicos conocidos y desconocidos:

12-25, 36-64, 25-16, 64-16, 81-25, etc.

Semejante fracaso lo concebimos también en otros casos. El teléfono número 17-53 nos proponemos recordarlo, aprovechando el hecho de que la suma de las dos primeras cifras (1 + 7) es igual a la suma de las dos últimas (5 + 3). Pero al final no resulta mejor que en el caso anterior. Y en efecto, aún falta no confundir a qué teléfono se le aplica precisamente esa, y a cuál se le aplica otra combinación. No puede sino sorprender, el ver cómo las personas intentan, con obstinación, emplear este método notoriamente inservible. La afición a este método, la ridiculizó con gran ingenio el escritor J. Hasek en sus famosas "*Aventuras del bravo soldado Sveik*"[2]:

"Sveik miró atentamente el número de su fusil y, al final, dijo:
- El número 4268. Justamente tal número estaba en una locomotora en Pées en la vía dieciséis. Era necesario llevar la locomotora a Liss para la reparación, pero esto no era tan fácil, porque el maquinista que debería conducirla allá, tenía muy mala memoria para los números. Entonces el jefe de distancia lo hizo venir al despacho y le dijo: "Sobre la vía 16 se encuentra la locomotora número 4268. Yo sé que usted tiene mala memoria para los números, y si escribe el número en un papelillo, pierde usted el papelillo. Pero si verdaderamente es tan débil para los números, entonces trate de recordar lo que yo ahora le indico, para que vea usted que es muy fácil conservar en la memoria cualquier número. El modo es el siguiente: la locomotora que es

[1] Conviene hacer notar que, en nuestra capital, un número telefónico consta de tres pares de cifras, por ejemplo: 46-44-25, 26-80-63, etc. (N. del T.)

[2] Jaroslav Hasek (nació el 30 de abril de 1883 en Praga; murió el 3 de enero de 1923 en Lipnitz) escritor satírico checoslovaco. (N. del T.)

necesario que usted conduzca al depósito, está marcada con el número 4268. Dirija precisamente la atención aquí. La primera cifra es un cuatro, la segunda un dos. Recuerde, por consiguiente, 42, es decir, dos por dos son cuatro, lo que nos da la primera cifra, y si usted la divide entre dos, obtiene de nuevo dos, y en esta forma se obtiene, junto al 4, el 2. Luego ya es sencillo. ¿Cuánto será el doble de cuatro? ocho ¿no es así?. Así usted graba en su memoria el ocho que es, la última cifra en nuestro número. Ahora ya recuerda usted que la primera cifra es el cuatro, la segunda el los y La última el ocho. Es decir, resta sólo recordar la cifra seis antes del ocho. Pero esto es completamente sencillo. La primera cifra que tenemos es el 4, la segunda el 2, y conjuntamente constituyen el 6. De esta manera el número 4268 ya se ha alojado firmemente en vuestra cabeza. Puede también llegar al resultado, por un camino más sencillo, a saber: de 8 se resta 2, y se obtiene 6. Recuerde: 6. De seis se resta 2, y se obtiene 4. Por consiguiente, tenemos ya 4 y 68. Ahora es necesario únicamente, colocar la cifra: 2 entre esos dos números y obtenemos 4268. Se puede hacer aún en otra forma, también muy fácilmente, por medio de la multiplicación. Recuerde que el doble de 42 es igual a 84. En un año hay doce meses. Es necesario reatar 12 de 84, quedando 72, y de 72 se restan los 12 meses. Se obtiene 60. Lo que tenemos aquí es, ya, el 6, porque el cero, sencillamente lo podemos dejar a un lado. Es decir, si escribimos 42-6-84 y dejamos a un lado el último 4, obtenemos inevitablemente el número 4268, es decir, el número de la locomotora que es necesario conducir".

Los métodos de los calculistas de estrado son de un género absolutamente diferente. He aquí uno de ellos, que en alguna ocasión puede llegar a servir a cada uno de nosotros. El calculista relaciona con las cifras, determinadas letras consonantes, bien aprendidas:

Cifras	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	B	*D*	*G*	*J*	*K*	*P*	*S*	*R*	*W*	*X*
Letras	*C*	*F*	*H*	*Z*	*M*	*R*	*T*	*V*	*Y*	*L*

Puesto que las letras elegidas son únicamente consonantes, entonces ellas pueden, no temiendo confusiones, combinarse con vocales para constituir palabras cortas. Por ejemplo:

Para los Números	las palabras	Para los Números	las palabras
1	de	6	ese
2	ha	7	va
3	jo	8	yo
4	ama	9	ole
5	upa	0	aca

En forma análoga se constituyen las palabras, también para números de dos cifras:

11 ? dedo
13 ? dejo
14 ? dama
16 ? dato
19 ? dale
2l ? hada

Para recordar el número 2549, el calculista de estrado mentalmente escribe bajo las cifras, las letras correspondientes:

2 5 4 9
G P K X
H R M L

y a partir de ella, constituye, rápidamente, las palabras:

25	49
GIRO	MALO

Tal es uno de los métodos mnemotécnicos empleados entre los calculistas de estrado. Existen también otros, sobre los cuales, sin embargo, no nos detendremos, pues ahora pasaremos a los métodos de realización de algunos casos.
¿Cuántos, años tengo?, ¿cuantos días tengo?, pregunta cualquiera del publico, Y obtiene rápidamente del estrado, la respuesta.
¿Y cuántos segundos tengo, si mi edad es tal? hace la pregunta otro, y obtiene también rápida respuesta.
¿Cómo se realizan semejantes cálculos?
Volver

3. "¿Cuantos Días Tengo?"
Para determinar de acuerdo con el número de año, el número de días, el calculista recurre al siguiente método: la mitad del número de años lo multiplica por 73 y añade un cero; el resultado será, precisamente, el número buscado. Esta fórmula se vuelve comprensible si se observa que 730 = 365 x 2: Si tengo 24 años, el número de días lo obtenemos multiplicando 12 x 73 = 876 añadiendo un cero: 8760. La propia multiplicación por 73 se realiza también en forma abreviada, como veremos más adelante.
La corrección en algunos días con motivo de los años bisiestos, generalmente no se efectúa en el cálculo, aunque es fácil introducirla agregando al resultado la cuarta parte del número de años; en nuestro ejemplo: 24:4 = 6; el resultado total, por consiguiente, es 8766.
El método para el cálculo del número de minutos, no se le dificultará al lector encontrarlo por sí mismo, después de lo indicado en el párrafo que sigue.
Volver

4. "¿Cuantos Segundos Tengo?"
Si la edad del interrogador se expresa por un número par no mayor que 26, entonces se puede responder muy rápidamente sobre esta cuestión empleando el siguiente método: la mitad del número de años se multiplica por 63; después la misma mitad se multiplica por 72; este resultado queda al lado del primero y se agregan tres ceros. Si por ejemplo, el número de años es 24, entonces para la determinación del número de segundos procedemos así:

$$63 \times 12 = 756; 72 \times 12 = 864, \text{ resultado } 756.864.000.$$

Como en el ejemplo anterior, aquí no están tomados en cuenta los años bisiestos, un error que nadie reprocha al calculista, cuando se tiene que ver con cientos de millones (pero que se puede corregir, agregando el número de segundos que se contienen, en la cantidad de días igual a la cuarta parte del número de años).
¿ En qué se basa el método aquí indicado ?
La justeza de nuestra fórmula se explica de un modo sencillo. Para determinar el número de segundos que se contienen en un número dado de años, es necesario que los años (24 en muestro ejemplo) se multipliquen por el número de segundos en el año, es decir,

$$365 \times 24 \text{ x } 60 \times 60 = 31.536.000.$$

Luego, el factor mayor 31.536 lo separamos en dos partes (el agregado de los ceros, por sí mismo es comprensible, y en lugar de que se multiplique 24 por 31.536, se multiplica 24 por 31.500 y por 36; pero también estas operaciones, para comodidad de los cálculos las substituimos por otras, como es evidente del siguiente esquema:

$$24 \times 31.536 = \left\{ \begin{array}{l} 24 \times 31.500 = 12 \times 63.000 = 756.000 \\ 24 \times 36 = 12 \times 72 = 864 \end{array} \right\} = 756.864$$

Sólo falta agregar tres ceros, y tenemos el resultado buscado:

756.864.000.

Volver

5. Métodos de Multiplicación Acelerada

Ya indicamos antes que para realizar las diversas operaciones de una multiplicación, vital componente de cada uno de los métodos arriba expuestos, existen también métodos adecuados. Algunos de ellos son sencillos y fácil de aplicar; aligeran a tal grado los cálculos, que en general, no molesta recordarlos para su empleo práctico. Tal es, por ejemplo, el método de la multiplicación cruzada, muy conveniente en las operaciones con números de dos cifras. El método no es nuevo; se remonta a los griegos e hindúes y en la antigüedad se llamaba "método relámpago" o "multiplicación por cruz". Ahora está olvidado y no tiene ningún problema el recordarlo.
Supóngase que se requiere multiplicar 24 × 32. Mentalmente disponemos los números conforme al siguiente esquema, uno debajo del otro:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ & \times & \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Ahora, realicemos sucesivamente las siguientes operaciones:

1. $4 \times 2 = 8$ ésta es la última cifra del resultado.
2. $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 es la penúltima cifra del resultado; recordemos mentalmente 1.

3. $2 \times 3 = 6$, más la aún conservada unidad en la mente, tenemos 7 ; ésta es la primera cifra del resultado.

Obtenemos, por consiguiente, el producto: 768.
Después de varios ejercicios este método se asimila fácilmente.
Otro método que consiste en los llamados "complementos", se aplica en forma conveniente en aquellos casos en que los números multiplicados están próximos al 100.
Supongamos que se requiere multiplicar 96×92. "El complemento" para 92 hasta 100 será 8, para 96 será 4. La operación se realiza conforme al siguiente esquema:

Factores	92	96
Complementos	8	4

Las dos primeras cifras del resultado se obtienen por la simple sustracción del "complemento" del multiplicando respecto del multiplicador o viceversa, es decir, de 92 se sustrae 4 ó de 96 se sustrae 8. Tanto en uno como en otro caso tenemos 88; a este número se le agrega el producto de los "complementos": 8 x 4 = 32. Obtenemos el resultado 8832.
Que el resultado obtenido deberá ser exacto, es indudable por las siguientes transformaciones:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88 \times (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4 \times (88 + 8) = 4 \times 8 + 88 \times 4 \end{cases}$$

$$92 \times 96 = 8.800 + 32 = 8.832$$

Veamos otro ejemplo:

Se requiere multiplicar 78 por 77.

Factores	78	77
Complementos	22	23

$$78 - 23 = 55$$
$$22 \times 23 = 506$$

$$5500 + 506 = 6006$$

Veamos un tercer ejemplo:
Multiplicar 99 x 98.

Factores	99	98
Complementos	1	2

$$99 - 2 = 97$$
$$1 \times 2 = 3$$

En el caso dado es necesario recordar que 97 denota aquí el número de centenas. Por tal razón sumamos:

$$9700 + 2 = 9702.$$

Volver

6. Para Cálculos Cotidianos

Existe un gran conjunto de métodos de realización acelerada de las operaciones aritméticas, métodos destinados no a intervenciones de estrado, sino a cálculos cotidianos. Si hubiera que exponer tan sólo los principales de dichos métodos, sería necesario escribir un libro completo. Nos limitaremos pues, a algunos ejemplos con números de uso común y corriente.

En la práctica de los cálculos técnicos y comerciales es un caso frecuente que se lleguen a sumar columnas de números muy próximos uno a otro, por lo que se refiere a la magnitud. Por ejemplo:

43
38
39
45
41
39
42

La adición de estos números se simplifica notablemente si se aprovecha el método indicado a continuación, cuya esencia es fácil de comprender

$$\begin{aligned} 43 &= 40 + 3 \\ 38 &= 40 - 2 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 45 &= 40 + 5 \\ 41 &= 40 + 1 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 42 &= 40 + 2 \end{aligned}$$

$$= 40 \times 7 + 3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2$$
$$= 280 + 7 = 287$$

De la misma manera hallamos la suma:

$$\begin{aligned} 752 &= 750 + 2 \\ 753 &= 750 + 3 \\ 746 &= 750 - 4 \\ 754 &= 750 + 4 \\ 745 &= 750 - 5 \\ 751 &= 750 + 1 \end{aligned}$$

$$= 750 \times 6 + 2 + 3 - 4 + 4 - 5 + 1$$
$$= 4500 + 1 = 287$$

En forma análoga se procede para hallar la media aritmética de números cuyo valor sea muy parecido. Encontremos, por ejemplo la media de los siguientes precios:

Rublos	kopeks
4	65
4	73
4	75
4	67
4	78
4	74
4	68
4	72

Fijemos a ojo, un precio redondeado próximo a la media: en el caso dado evidentemente es 4 r, 70 k. Escribamos las desviaciones de todos los precios con relación a la media: los excesos con el signo +, los defectos en el signo -.
Obtenemos: - 5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12

Dividiendo la suma de las desviaciones entre el número de ellas, tenemos:

$$12:8 = 1,5.$$

Así pues, el precio medio buscado es:

4 rublos 70 k + 1,5 k. = 4 rublos y 71,5 kopeks

Pasemos a la multiplicación. Ante todo indiquemos que la multiplicación por los números 5, 25 y 125 se acelera notablemente si se tiene en cuenta, lo siguiente:

$$5 = 10/2; \quad 25 = 100/4; \quad 125 = 1000/8$$

Por esta razón, por ejemplo:

$$36 \times 5 = 360/2 = 180$$
$$36 \times 25 = 3600/4 = 900$$
$$36 \times 125 = 36\,000/8 = 4500$$
$$87 \times 5 = 870/2 = 435$$
$$87 \times 25 = 8700/4 = 2175$$
$$87 \times 125 = 87\,000/8 = 10875$$

Para multiplicar por 15 se puede aprovechar que

$$5 = 10 \times 1\ 1/2$$

Por tal motivo, es fácil realizar en la mente cálculos como:

$$36 \times 15 = 360 \times 1\ 1/2 = 360 + 180 = 540$$

o sencillamente,

$$36 \times 1\ 1/2 \text{ x } 10 = 540,$$
$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1305.$$

En la multiplicación por 11 no hay necesidad de escribir 5 renglones:

$$\begin{array}{r} 383 \\ \times 11 \\ \hline 383 \\ +\,383\cdot \\ \hline 4213 \end{array}$$

basta con que bajo el número multiplicado se escriba él mismo, corrido una cifra:

$$\begin{array}{l} 383 \\ \underline{+383} \\ 4213 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 383 \\ \underline{+383} \\ 4213 \end{array}$$

y se efectúa la suma.
Es útil recordar los resultados de multiplicar por 12, 13, 14 y 15, como se hace con los primeros 9 números. Así, la multiplicación de números de varias cifras por tales factores se acelera en gran medida. Supóngase que se desea multiplicar

$$\begin{array}{r} 4587 \\ \underline{\times 13} \end{array}$$

Procedamos así. Cada cifra del multiplicando multipliquémosla mentalmente, a la vez, por 13:
1. 7 × 13 = 91; escribimos el 1, y memorizamos 9
2. 8 × 13 = 104; 104 + 9 = 113; escribimos el 3 y memorizamos 11
3. 5 × 13 = 65; 65 + 11 = 76; escribimos el 6, y memorizamos 7
4. 4 × 13 = 52; 52 + 7 = 59.

Total: 59.631

Después de algunos ejercicios;, este método se asimila fácilmente.
Existe un método muy conveniente para la multiplicación de números de dos cifras por 11: basta con separar las cifras del multiplicando, y escribir entra ellas, su suma:

$$43 \times 11 = 473.$$

Si la suma de las cifras tiene dos cifra, entonces el número de sus docenas se suma a la primera cifra del multiplicando:

$$18 \times 11 = 4(12)8, \text{ es, decir } 528.$$

Indiquemos finalmente, algunos métodos de la división acelerada. Al dividir entre 5, multipliquemos por 2 dividendo y divisor:

$$3471:5 = 6942:10 = 694.2$$

Para dividir entre 25, multipliquemos cada número por 4:

$$3471:25 = 13\ 884:100 = 138.84$$

En forma parecida se procede para dividir entre 1 ½ (= 1.5) y entre 2 ½ (= 2.5)

$$3171:1\ ½ = 6942:3 = 2314,$$
$$3471:2,5 = 13\ 884:10 = 1388,4$$

Volver

7. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 1 + \\ + 74 \times \dfrac{3}{6} + 25 \times \dfrac{9}{18} + \\ + 95 \times \dfrac{3}{6} + 4 \times \dfrac{9}{18} \end{cases}$$

Volver